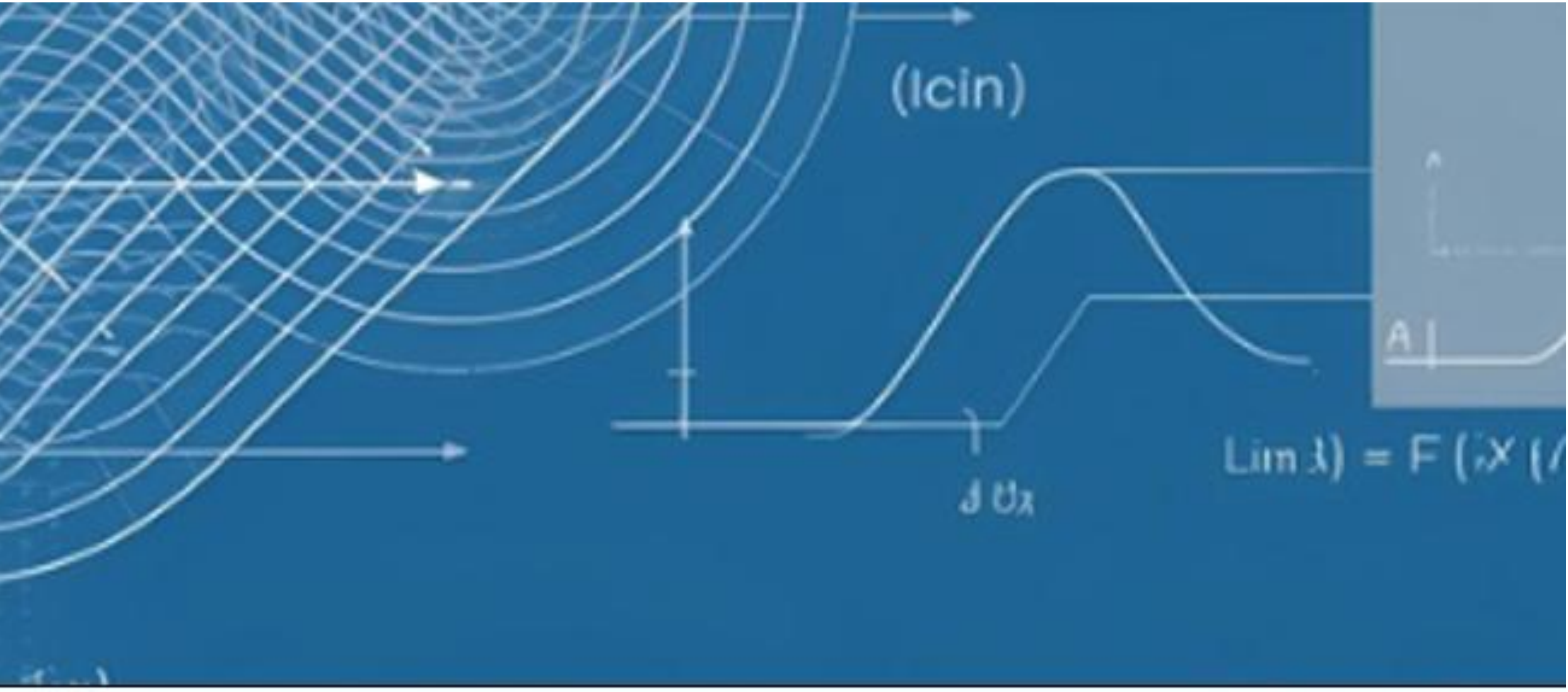
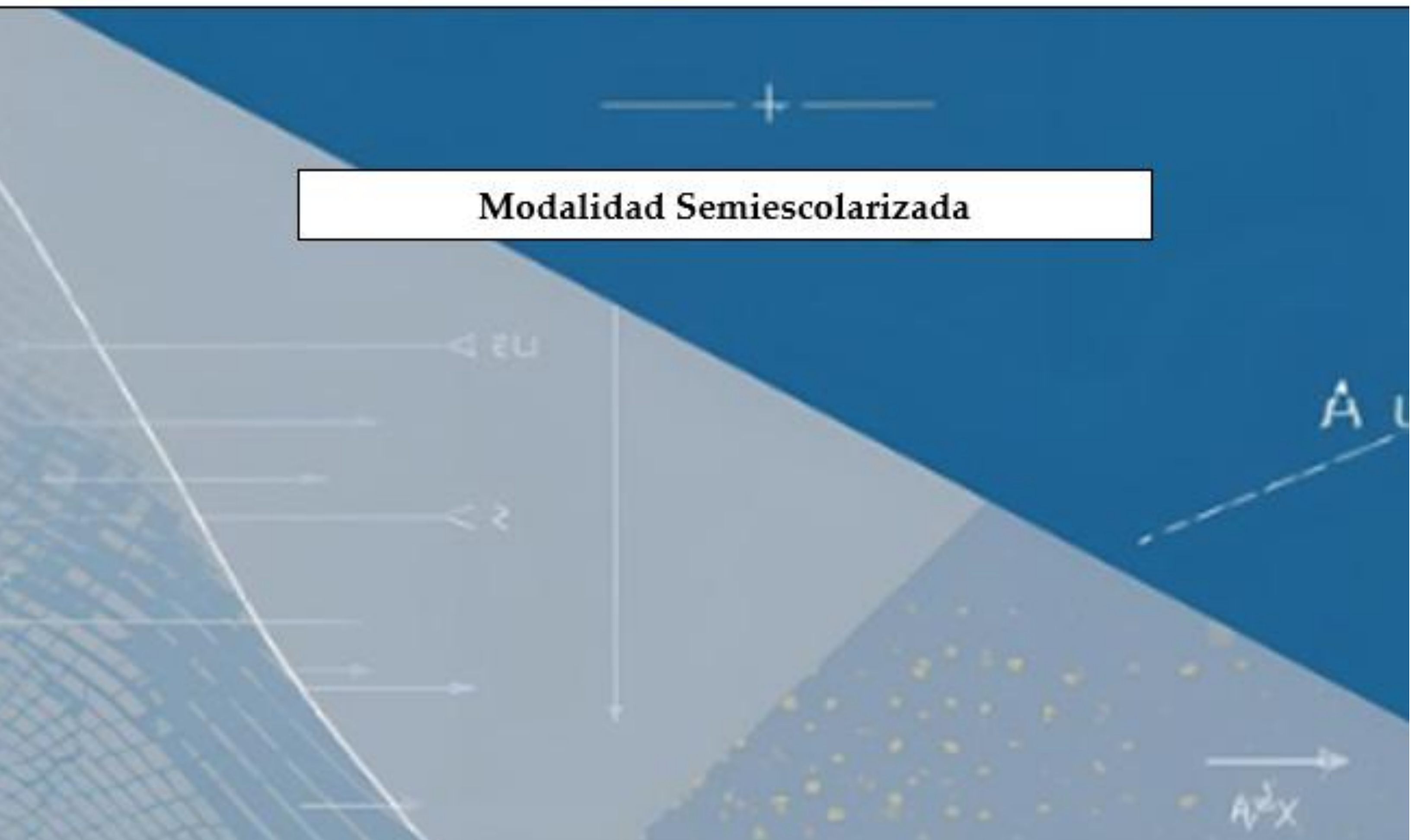


Cálculo I

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencebia Sosa
Policarpio Sicairos Avitia



Modalidad Semiescolarizada

Contenido

Dedicatoria y agradecimientos

A nuestros queridos docentes.

Con profundo agradecimiento y admiración dedicamos este libro a aquellas y aquellos profesores excepcionales que, con su pasión por la enseñanza y su compromiso inquebrantable, han guiado la creación de estas páginas. Su dedicación en el desarrollo del pensamiento variacional con un enfoque procedural y de resolución de problemas ha iluminado el camino a otros docentes del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Sus enseñanzas han sido como faros de sabiduría, iluminando mentes, inspirando la curiosidad y fomentando el gusto por el aprendizaje. En este sentido, este libro es un testimonio de ese arduo trabajo y devoción, y esperamos que sea bien recibido para formar las nuevas generaciones de estudiantes. Así, su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje nos invita a seguir aprendiendo y creciendo como un equipo de docentes, que ve en la innovación la importancia de incorporar la inteligencia artificial (IA) como un apoyo en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Tomemos en cuenta que la integración de la inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje emerge como un catalizador fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional. Al aprovechar sus capacidades, la IA puede facilitar el acceso al conocimiento, personalizar el aprendizaje, optimizar los métodos pedagógicos y evaluar los resultados. Además, el estudiante la puede utilizar como un tutor en su proceso de aprendizaje. En definitiva, se reconoce el impacto de la IA como un aliado del docente en el proceso educativo.

En agradecimiento por sembrar las semillas para el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes del NMS de la UAS, les extendemos nuestra más sincera gratitud. Que este libro sea un tributo a su legado en la formación de mentes brillantes y pensadores en el quehacer de las matemáticas.

Colaboradores:

<table>
<tr><th>Nombre</th><th>UA</th></tr>
<tr><td>Santiago Meza Olivas</td><td>Hermanos Flores Magón</td></tr>
<tr><td>Felipe de Jesús Sicairos Avitia</td><td>Navolato</td></tr>
<tr><td>Oscar Mauricio Heredia Ruiz</td><td rowspan="2">C.U. Mochis</td></tr>
<tr><td>Horacio Gabriel López Ramírez</td></tr>
</table>

Presentación

Es un placer presentarles este libro de Cálculo I (cálculo diferencial), que ha sido cuidadosamente diseñado para acompañar a las y los estudiantes de bachillerato en su fascinante travesía por el mundo de esa maravillosa forma matemática de pensar denominada pensamiento matemático, que proporciona una base sólida y estimulante para el aprendizaje.

Así, este libro es para utilizarse en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) Cálculo I del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático, correspondiente al quinto cuatrimestre del componente fundamental y extendido del plan de estudios (UAS, 2024) del Currículo de la modalidad mixta opción mixta del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2024 que, de acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2023a), enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático.

> El pensamiento matemático, según el MCCEMS, se define como:
> un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos, incluida la intuición, que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas. (SEP, 2023c, p. 17)

La secuencia de este libro está basada en progresiones de aprendizaje, cada una diseñada para desarrollar sobre la anterior un pensamiento matemático; para el caso particular de esta UAC, un pensamiento variacional.

En el sentido anterior, las progresiones de aprendizaje (PA) de la UAC Cálculo I desarrollan el pensamiento variacional para el logro de las metas de aprendizaje en la siguiente secuencia:

- PA 1. Límites de funciones.
- PA 2. Límites infinitos y límites en el infinito.
- PA 3. Funciones continuas.
- PA 4. Derivadas de funciones algebraicas.
- PA 5. La derivada de funciones compuestas, implícitas y de orden superior.
- PA 6. Derivadas de funciones trigonométricas.
- PA 7. La derivada de la función exponencial y logarítmica.
- PA 8. Análisis y representación gráfica de funciones.

Bajo esta lógica del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, las progresiones de aprendizaje están estructuradas y secuenciadas, en el sentido de que cada una es más compleja que la anterior, de acuerdo al nivel de pensamiento matemático que demande cada progresión. Cada una de ellas, se inicia con una evaluación diagnóstica; luego, le siguen ejemplos, actividades y evaluación formativas diseñadas atendiendo a las subcategorías de las categorías del pensamiento matemático, mismas que orientan hacia el logro de las metas de aprendizaje.

Además, en cada PA se consideran tres momentos claves de la evaluación: diagnóstica, formativa (mientras se aprende) y final; haciendo énfasis en la evaluación formativa en función de la retroalimentación, para que, durante el proceso de realizar las actividades de aprendizaje, las y los docentes puedan determinar el nivel de logro por los estudiantes, en particular, de las metas de aprendizaje que contribuyen a los aprendizajes de trayectoria. Es decir, se utiliza la evaluación formativa como herramienta para comprender su progreso y ajustar, en consecuencia, las estrategias activas.

También, durante el proceso de aprendizaje, en cada PA se lleva a cabo la autoevaluación (A), coevaluación (C) y heteroevaluación (H) de las metas a lograr; para ello, se implementa como técnica principal de evaluación, la observación, utilizando guías específicas para tal fin. Los resultados se reflejarán en la tabla que aparece al inicio de cada progresión en correspondencia con el desempeño de cada estudiante.

Por otra parte, se sugiere usar los códigos QR (generados en parzibyte: https://parzibyte.me/apps/generador-qr/), así como la Inteligencia Artificial y las aplicaciones de celular como aliados en este proceso de aprendizaje. En cuanto a las representaciones gráficas que se incluyen, estas fueron hechas en Desmos y GeoGebra, así como las figuras en Word.

Finalmente, el desarrollar un pensamiento matemático no solo les abrirá las puertas en el aula, sino que también los acompañará a lo largo de sus vidas, dotándoles de la capacidad de enfrentar cualquier desafío con ingenio y perspicacia.

¡Adentrémonos juntos en el fascinante universo del pensamiento matemático!

Tabla de categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Cálculo I

Cálculo I. Cálculo diferencial			
Categorías			
C1 Procedural	**C2** Procesos de intuición y razonamiento	**C3** Solución de problemas y modelación	**C4** Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
S1 Elementos aritmético-algebraicos	**S1** Capacidad para observar y conjeturar	**S1** Uso de modelos	**S1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
S2 Elementos geométricos	**S2** Pensamiento intuitivo	**S2** Construcción de modelos	**S2** Negociación de significados
S3 Elementos variacionales	**S3** Pensamiento formal	**S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	**S3** Ambiente matemático de comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
Metas de Aprendizaje			

M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	**M1-C2** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**M1-C3** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**M1-C4** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**M2-C2** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	**M2-C3** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**M2-C4** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
	M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	**M3-C3** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	**M3-C4** Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.
	M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o	**M4-C3** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos	

	problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

PA 1. Límites de funciones

Progresión de aprendizaje 1
Analiza el concepto de límite, evaluando su comportamiento a través de métodos gráficos, numéricos y analíticos para determinar el valor al que se aproxima una función en un punto dado.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 1.1

Selecciona la opción correcta en cada pregunta.

1. ¿Cuál es el factor común de los términos en el polinomio $6x^2 - 3x$?
   a) $3x$ b) $6x$ c) x d) $2x$

2. ¿Cuál es la factorización del polinomio $x^2 - 16$?
   a) $(x-4)^2$ b) $x(x-16)$ c) $(x+4)(x-4)$ d) $(x+4)^2$

3. ¿Cuál es el resultado de factorizar el polinomio $x^2 - 4x - 12$?
   a) $(x+6)(x-2)$ b) $(x-2)(x-6)$ c) $(x+2)(x+6)$ d) $(x-6)(x+2)$

4. ¿Cuál es el resultado de simplificar la fracción $\frac{x^2-9}{x+3}$?
   a) $x+3$ b) $x-3$ c) $x-9$ d) $x+9$

5. ¿Cuál es el resultado de racionalizar el denominador de la fracción $\frac{5x}{\sqrt{x}}$?
   a) 5 b) $\frac{5x}{\sqrt{5x^2}}$ c) $5\sqrt{x^3}$ d) $5\sqrt{x}$

6. ¿Cuál es el valor de $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$?
   a) sen (2θ) b) 1 c) 0 d) $\tan\theta$

7. ¿Cuál es el resultado de evaluar la expresión $2x^2 - 4x + 1$ cuando $x = -1$?

a) 7 b) 3 c) 1 d) –1

El estudio de los límites de funciones es el punto de partida en el cálculo diferencial, ya que constituye la base teórica sobre la cual se construyen conceptos clave como la continuidad de una función y la derivada. En esta progresión de aprendizaje se estudia el límite para comprender cómo se comporta una función cuando sus valores se acercan a un punto determinado, aunque la función no necesariamente esté definida en ese punto.

El concepto de límite ha evolucionado a lo largo de los siglos. Desde los antiguos griegos, que estudiaban las paradojas relacionadas con el infinito, hasta matemáticos como Newton y Leibniz, que desarrollaron los fundamentos del cálculo en el siglo XVII. Sin embargo, no fue hasta el siglo XIX cuando matemáticos como Cauchy y Weierstrass formalizaron la definición de límite tal como la conocemos hoy. Para los fines requeridos en el nivel bachillerato, es que aquí introduciremos una definición intuitiva de límite.

Por ejemplo, cuando vas conduciendo por una carretera y ves una señal que indica "Límite de velocidad: 80 km/h". ¿Qué significa esto realmente? No es solo una advertencia para no ir más rápido, sino que también nos da una idea de cómo se comporta el tráfico en esa zona. Ahora, si hay una señal de un tope, cómo se comporta el tráfico al acercarse a este, otro caso es en cuando hay un gran bache en la carretera. De manera similar, en matemáticas, el concepto de límite nos ayuda a entender cómo se comporta una función cuando nos acercamos a un punto específico de la misma.

Funciones

Antes de presentar una definición intuitiva del límite definamos el concepto de función matemática.

Definiciones de función

1. Una **función** f de un conjunto A a un conjunto B es una relación o regla de correspondencia que a cada elemento $x \in A$ le asigna un único elemento $y = f(x) \in B$.
2. Una **función** es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en el que no existen dos o más pares ordenados con el mismo valor de x y diferentes valores de y.
3. Una **función** es una relación entre dos variables (x, y) de tal manera que a x (la variable independiente), le corresponde uno y sólo uno de los valores de y (la variable dependiente).

Cuando los conjuntos A y B son numéricos nos referimos a funciones numéricas y estas se pueden clasificar en algebraicas y trascendentes.

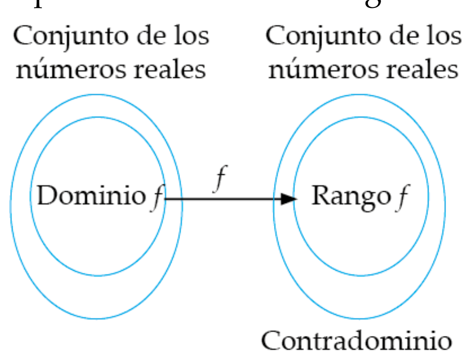
- Funciones
  - Algebraicas
    - Polinomiales — Ejemplos: $f(x) = 5x, f(x) = 3x^2 - x + 5$
    - Racionales — Ejemplos: $f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$
    - Irracionales — Ejemplos: $f(x) = \sqrt{x}, f(x) = \sqrt[3]{x^2+3}$
  - Trascendentes
    - Logarítmicas — Ejemplos: $f(x) = \log_{10} x\,, f(x) = \ln x$
    - Exponenciales — Ejemplos: $f(x) = 2^x, f(x) = e^x$
    - Trigonométricas — Ejemplos: $f(x) = \operatorname{sen} x, f(x) = \cos x$

Para conocer el valor "$f(x)$" de una función f en un valor específico de x, es necesario asignarle un número real a x para evaluarla, por ejemplo, $f(x) = 6x - 5$ para $x = 2$, es $f(2) = 6(2) - 5 = 12 - 5 = 7$. Al conjunto de estos valores de la variable independiente x, para los que está definida $f(x) = 6x - 5$ se le conoce como **dominio de la función** (D_f), así, $D_f = \mathcal{R}$. Luego, cada número real x en el que se puede evaluar f está relacionado con un único valor $f(x)$, que se llama **imagen de $\boldsymbol{x}$**, es decir, la imagen para $x = 2$ es $f(2) = 7$. Al conjunto de estas imágenes de $f(x)$ se le conoce como **rango** (R_f), **recorrido** o **conjunto imagen** de la función.

El **dominio** de una función f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

El **rango** de una función f es el subconjunto de números reales que resulta de evaluar $f(x)$ para cada número real de su dominio.

En términos de conjuntos, la definición de dominio y rango de una función f, se representan como en la siguiente figura:



Por ejemplo:

- Para la función $f(x) = x$, el dominio y rango son iguales al conjunto de los números reales.
- Para la función $f(x) = x^2$, el dominio es igual al conjunto de los números reales, pero el rango es el subconjunto de los números reales no negativos.
- Para la función $f(x) = \sqrt{x}$, el dominio y rango son el subconjunto de los números reales no negativos.

De los ejemplos, tanto el dominio como el rango de una función son subconjuntos del conjunto de los números reales. Además, el contradominio es igual al conjunto de los números reales, por lo que el rango es un subconjunto del contradominio. Se aclara que un conjunto es subconjunto de sí mismo, por aquello de que el dominio y/o el rango sean iguales al conjunto de los números reales.

Límites

El concepto central en esta progresión, es el de "límite", que se utiliza para estudiar el comportamiento de las funciones en un punto o en el infinito. Como antecedente, para el estudio de los límites, del tema de funciones se necesitan los conceptos de dominio y rango de una función, así como, graficar y explorar su comportamiento.

En el tema de las funciones, para determinar el valor de la imagen $f(x)$ solo se necesita tener el valor x del dominio de la función. Pero, ¿qué pasa si la representación gráfica de la función tiene huecos o saltos? ¿Qué pasa si la función crece o decrece al infinito? ¿Qué pasa si la función no está definida en un valor x en particular? Para describir el comportamiento de las funciones y especialmente para las que presentan este tipo de casos en determinados valores de x, es que se requiere el concepto de límite

Para comprender la importancia del límite, a continuación, se presentan tres ejemplos en un contexto matemático, mediante los cuales se da un mayor sentido a la noción intuitiva de límite.

Ejemplo formativo 1.1

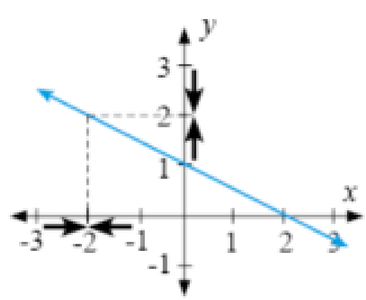
1. En la siguiente gráfica de $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$, si x se aproxima por la izquierda y por la derecha a -2, ¿a qué valor se aproxima $f(x)$?

Resolución

Cuando x se aproxima a –2 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 2.

x	$f(x)$
–2.1	2.05
–2.01	2.005
–2.001	2.0005
–2.0001	2.00005
–2.00001	2.000005

Cuando x se aproxima a –2, $f(x)$ se aproxima a 2.



Cuando x se aproxima a –2 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 2.

x	$f(x)$
–1.9	1.95
–1.99	1.995
–1.999	1.9995
–1.9999	1.99995
–1.99999	1.999995

Cuando x se aproxima a –2 tanto por la izquierda como por la derecha, el valor al que se aproxima $f(x)$ coincide con la imagen de la función $f(-2) = 2$. Es decir, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a –2, es 2. Y se denota como $\lim_{x \to -2} \left(-\frac{x}{2} + 1\right) = 2$.

Ejemplo formativo 1.2

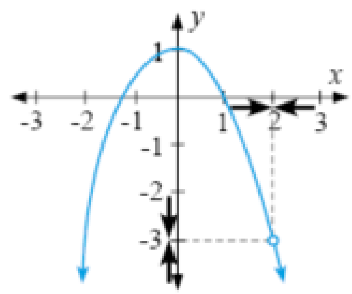
1. En la siguiente gráfica $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x-2}$, si x se aproxima por la izquierda y por la derecha a 2, ¿a qué valor se aproxima $g(x)$?

Resolución

Cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, $g(x)$ se aproxima a –3.

x	$g(x)$
1.9	–2.61
1.99	–2.9601
1.999	–2.996001
1.9999	–2.99960001
1.99999	–2.9999600001

Cuando x se aproxima a 2, $g(x)$ se aproxima a –3.



Cuando x se aproxima a 2 por la derecha, $g(x)$ se aproxima a –3.

x	$g(x)$
2.1	–3.41
2.01	–3.0401
2.001	–3.004001
2.0001	–3.00040001
2.00001	–3.0000400001

En la gráfica anterior, se observa que $g(2)$ no está definida (tiene un **hueco** en $x = 2$), sin embargo, cuando x se aproxima a 2 tanto por la izquierda como por la derecha, $g(x)$ se aproxima a –3. Es decir, el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a 2, es –3. Se denota como $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x-2}\right) = -3$.

Ejemplo formativo 1.3

1. En la función $h(x) = \begin{cases} -(-x+1)^3 + 1, & x < 1 \\ (x-2)^3 + 3, & x > 1 \end{cases}$, si x se aproxima por la izquierda y por la derecha a 1, ¿a qué valor se aproxima $h(x)$?

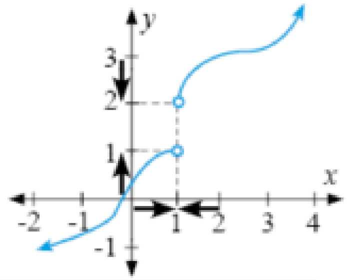
Resolución

Cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, $h(x)$ se aproxima a 1.

Cuando x se aproxima a 1, $h(x)$ no se aproxima a ningún valor.

Cuando x se aproxima a 1 por la derecha, $h(x)$ se aproxima a 2.

x	$h(x)$
0.9	–2.61
0.99	–2.9601
0.999	–2.996001
0.9999	–2.99960001



x	$h(x)$
1.1	–3.41
1.01	–3.0401
1.001	–3.004001
1.0001	–3.00040001

En la gráfica anterior, se observa que $h(1)$ no está definida y tiene un **salto finito** en $x = 1$, además, cuando x se aproxima a 1 tanto por la izquierda como por la derecha, $h(x)$ no se aproxima a un mismo valor. Por lo tanto, el límite no existe.

Se presentaron tres ejemplos de funciones en las que x se aproxima a un valor dado. De ellos, en los Ejemplos formativos 1.1 y 1.2 el límite existe y en el Ejemplo formativo 1.3, el límite no existe.

En los tres ejemplos formativos anteriores, x puede aproximarse por la izquierda y por la derecha a un valor dado c. Ahora, si $f(c)$ está definida como en el Ejemplo formativo 1.1, $f(x)$ se aproxima por la derecha y por la izquierda a $f(-2) = 2$. Por otra parte, en el Ejemplo formativo 1.2, $g(2)$ no está definida, es decir, la representación gráfica tiene un hueco en $x = 2$, sin embargo, $g(x)$ se aproxima tanto por la izquierda como por la derecha a –3. Por último, en el caso de que se tenga un salto finito como en el Ejemplo formativo 1.3, en esta situación $h(x)$ no se aproxima al mismo valor al acercarse por la izquierda y por la derecha a $x = 1$.

Es en los Ejemplos formativos 1.2 y 1.3 donde el límite toma relevancia para estudiar la variación de la función en puntos donde no está definida o en los que no se sabe con exactitud hacia que valor se aproxima. Con este antecedente, se tienen las condiciones para establecer la noción intuitiva de límite.

Noción intuitiva de límite

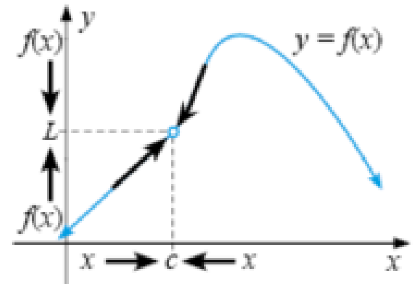
Si $f(x)$ se hace arbitrariamente próximo al número L al tomar x suficientemente cerca de c, pero diferente a este, tanto por la izquierda como por la derecha de c, entonces el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L.

Su notación es: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Se lee "$f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a c"

Cálculo de límites por medio de métodos gráficos y numéricos

Al calcular el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to c$, puede que este exista o no, más aún, el límite puede existir y la función no estar definida en c, como se muestra en la gráfica de la derecha. Para explorar el comportamiento de una función en el límite, a continuación, se hará mediante métodos gráficos y numéricos, aplicando los límites laterales (aproximarse por la izquierda y por la derecha). Se aclara que hay casos en los que sólo existe uno de los límites laterales, por ejemplo, si se trata del límite de una función cuando x crece indefinidamente, es decir $x \to +\infty$.



Limite por la izquierda

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

Si los límites laterales L y M son iguales, es decir,

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Entonces el límite existe

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

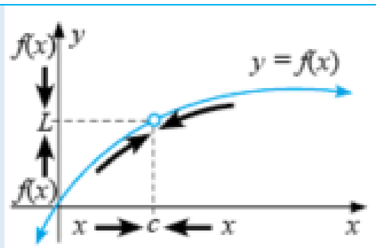
Limite por la derecha

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = M$$

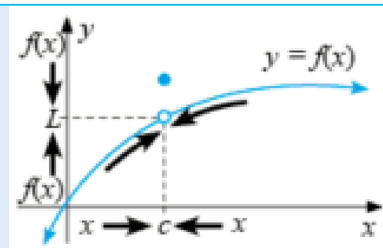
La existencia del límite implica unicidad, es decir, **si el límite existe, es único (**su demostración requiere de la definición formal de límite, por lo que se deja para cursos avanzados de cálculo).

Como ya se ha mencionado, $f(c)$ no necesita estar definida para que el límite exista, es suficiente con que $f(x)$ este definida para un valor x cerca de c. Es decir, el límite está asociado con el comportamiento de la función cuando x está cerca de c, pero no necesariamente en c. Para aclarar lo anterior, analiza las gráficas de las situaciones 1, 2 y 3.

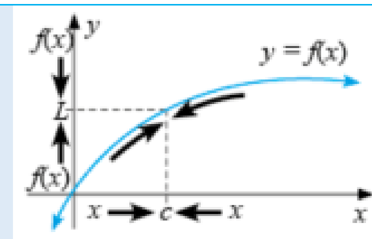
Situación 1. Cuando x se aproxima a c, si los límites laterales son iguales el límite de $f(x)$ existe, esté o no definida $f(c)$.



$f(c)$ no está definida
Los límites laterales son iguales
El límite existe y es L

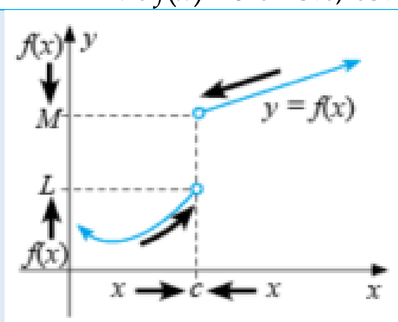


$f(c)$ está definida
Los límites laterales son iguales
El límite existe y es L
$f(c) \neq L$

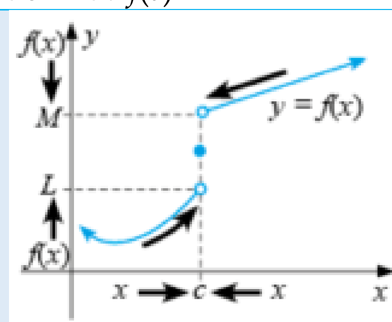


$f(c)$ está definida
Los límites laterales son iguales
El límite existe y es L
$f(c) = L$

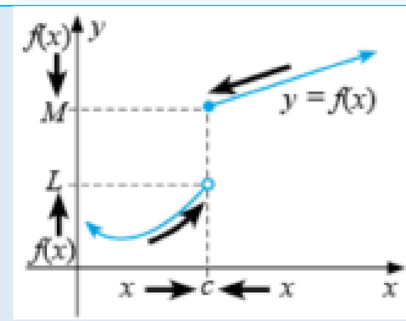
Situación 2. Cuando x se aproxima a c, si los límites laterales son diferentes el límite de $f(x)$ no existe, esté o no definida $f(c)$.



$f(c)$ no está definida
Los límites laterales son diferentes
El límite no existe



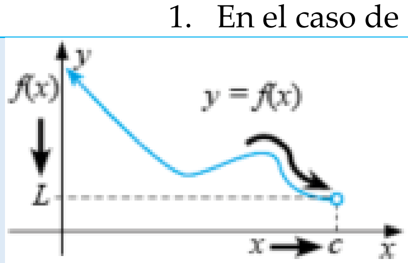
$f(c)$ está definida
Los límites laterales son diferentes
El límite no existe

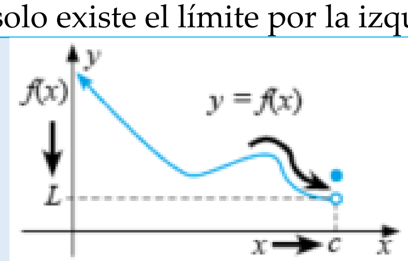


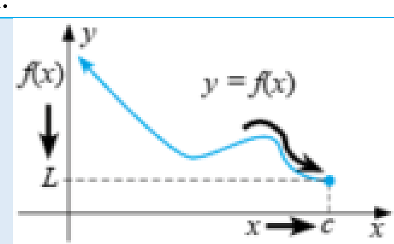
$f(c)$ está definida
Los límites laterales son diferentes
El límite no existe

Situación 3. Cuando en la proximidad a un punto solo existe uno de los límites laterales de la función (más adelante se ve el caso de las asíntotas). En esta situación hay dos casos:

1. En el caso de que solo existe el límite por la izquierda.

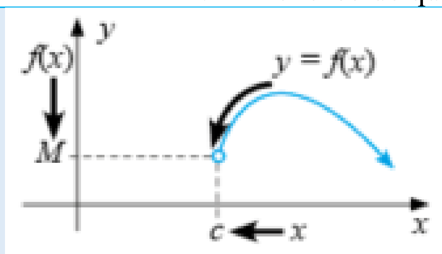




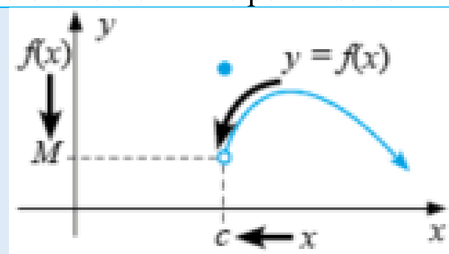


$f(c)$ no está definida El límite por la izquierda es L El límite no existe	$f(c)$ está definida El límite por la izquierda es L El límite no existe	$f(c)$ está definida El límite por la izquierda es L El límite no existe

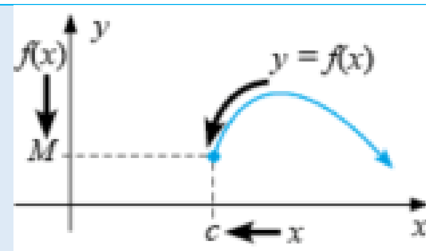
2. En el caso de que solo existe el límite por la derecha.



$f(c)$ no está definida
El límite por la derecha es M
El límite no existe



$f(c)$ está definida
El límite por la derecha es M
El límite no existe



$f(c)$ está definida
El límite por la derecha es M
El límite no existe

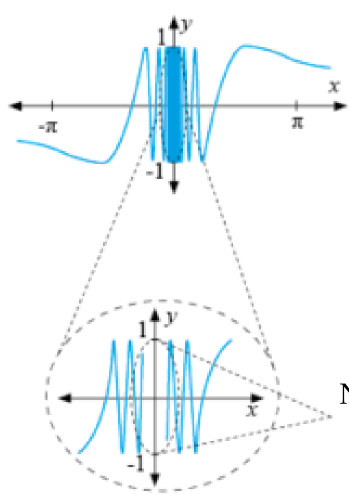
De la situación 3, se puede concluir que, si solo existe uno de los límites laterales, entonces el límite no existe.

Cálculo analítico de límites

El cálculo del límite de una función en un punto, a través de la representación gráfica y el uso de tablas de valores para analizar su comportamiento en las cercanías de dicho punto, proporciona herramientas visuales útiles. Sin embargo, en algunas ocasiones, estas herramientas pueden no ofrecer una evidencia precisa o concluyente sobre el comportamiento real de la función en el entorno del punto evaluado. Por ejemplo, en el cálculo del $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Límite por la izquierda	
x	$f(x)$
–0.0079	–0.966778
–0.00885	–0.017748
–0.0000004	–0.0000000001

Se infiere que el $\lim_{x\to 0^-} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$



Límite por la derecha	
x	$f(x)$
–0.0079	0.966778
–0.00885	0.017748
–0.0000004	0.0000000001

Se infiere que el $\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

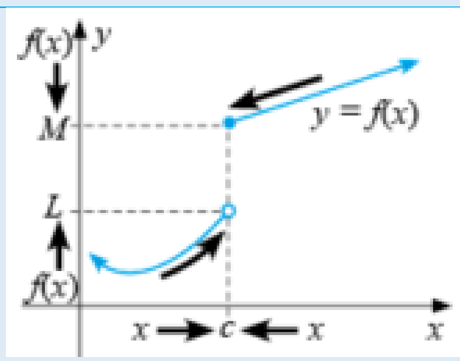
No se aproxima a ningún valor

Como se muestra en las tablas anteriores, para algunos puntos específicos, como $x = -0.0000004$ y $x = 0.0000004$, etc., la función parece aproximarse a cero, pero esto es engañoso. Debido a que la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ oscila infinitamente cerca de $x = 0$, otros valores cercanos a $x = 0$ dan resultados diferentes (que oscilan entre -1 y 1). Por lo tanto, la tabla de valores no revela la naturaleza de la oscilación de la función.

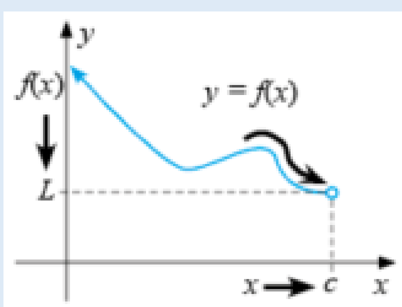
A partir de la gráfica de $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, observa que, conforme $x \to 0$, la longitud de onda de la función se reduce cada vez más. Esta oscilación infinita genera un comportamiento extremadamente complicado de representar gráficamente, ya que la función no se aproxima a ningún valor particular. Visualmente, se ve como un patrón de ondas extremadamente densas que parece desvanecerse sin acercarse a ningún valor fijo. Otros casos en los que el límite de una función no existe se muestran a continuación.

Tipos de comportamientos de $f(x)$ asociados a la no existencia del $\lim_{x\to c} f(x)$.

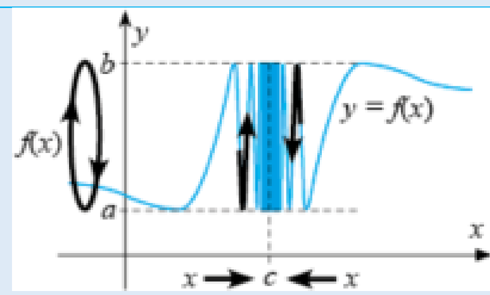
1. Si $f(x)$ se aproxima a un número diferente cuando $x \to c^-$, del que cuando $x \to c^+$.



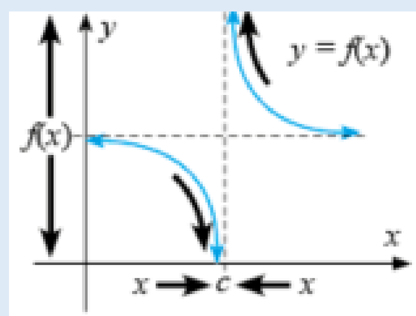
2. Si no hay valores próximos a c por la izquierda y/o derecha.



3. Si $f(x)$ oscila entre dos valores fijos a, b, cuando $x \to c$.



4. Si $f(x)$ crece o decrece sin límite a medida que $x \to c$.



Para poder calcular el límite de funciones como $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ y otras más, se hace mediante el cálculo analítico, usando propiedades de los límites, así como estrategias definidas cuando se presentan las indeterminaciones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, (las que no representan un valor numérico).

Propiedades de los límites

Sean n un entero positivo, k una constante real y f y g funciones que tengan límite en el número real c, entonces:

1. $\lim_{x \to c} k = k$;
2. $\lim_{x \to c} x = c$;
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$;
4. $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$;
5. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$;
6. $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$;
7. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$;
8. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, siempre que $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ cuando n sea par.

Algunos límites pueden calcularse mediante sustitución directa. Sin embargo, en otros casos es necesario emplear técnicas o recursos algebraicos, como la factorización, la racionalización o la multiplicación por una expresión conveniente equivalente a 1, con el fin de simplificar la expresión y facilitar el cálculo del límite.

Cálculo de límites por sustitución directa

Este método consiste en aplicar directamente las propiedades de los límites para calcular $\lim_{x \to c} f(x)$, siempre y cuando $f(x)$ no presente irregularidades en c asociadas a la no existencia del límite.

En los siguientes ejemplos formativos se aplican las propiedades de los límites. En el Ejemplo formativo 1.4, cada paso se justifica utilizando dichas propiedades, mientras que en los Ejemplos formativos del 5 al 10 se omiten dichas justificaciones.

Ejemplo formativo 1.4

Calcula el $\lim_{x\to 0}(x^2+2x-1)$

Resolución

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(x^2+2x-1) &= \lim_{x\to 0}x^2+\lim_{x\to 0}2x-\lim_{x\to 0}1 && \text{Propiedad 4}\\ &= \left(\lim_{x\to 0}x\right)^2+2\lim_{x\to 0}x-1 && \text{Propiedades 1, 3 y 7}\\ &= (0)^2+2(0)-1 && \text{Propiedad 2}\\ &= -1\end{aligned}$$

Ejemplo formativo 1.5

Calcula el $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}x\cdot\cos x)$

Resolución

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}x\cdot\cos x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

Ejemplo formativo 1.6

Calcula el $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2^x}{\sqrt{x}}$

Resolución

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2^x}{\sqrt{x}} = \frac{\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2^x)}{\lim_{x\to 4}\sqrt{x}} = \frac{\lim_{x\to 4}\sqrt{x}+\lim_{x\to 4}2^x}{\sqrt{\lim_{x\to 4}x}} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 4}x}+2^4}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}+2^4}{\sqrt{4}} = \frac{2+16}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Ejemplo formativo 1.7

Calcula el $\lim_{x\to 1}(\log x+e^x)$

Resolución

$$\lim_{x\to 1}(\log x+e^x) = \lim_{x\to 1}\log x+\lim_{x\to 1}e^x = \log 1+e^1 = 0+e = e$$

Ejemplo formativo 1.8

Calcula el $\lim_{x\to -3}\frac{9-x^2}{x+3}$

Resolución

$$\lim_{x\to -3}\frac{9-x^2}{x+3} = \frac{\lim_{x\to -3}(9-x^2)}{\lim_{x\to -3}(x+3)} = \frac{\lim_{x\to -3}9-\lim_{x\to -3}x^2}{\lim_{x\to -3}x+\lim_{x\to -3}3} = \frac{9-(-3)^2}{-3+3} = \frac{9-9}{-3+3} = \frac{0}{0}$$

El $\lim\limits_{x\to -3} \frac{9-x^2}{x+3}$ da la indeterminación $\frac{0}{0}$, para calcularlo se requiere aplicar el método de factorización para cancelar la indeterminación. Este método se verá más adelante.

Ejemplo formativo 1.9

Calcula el $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

Resolución

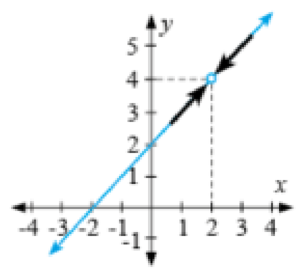
$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}(x-4)}{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 4} x - \lim\limits_{x\to 4} 4}{\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} - \lim\limits_{x\to 4} 2} = \frac{4-4}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 4} x} - 2} = \frac{0}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}$$

El $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ da la indeterminación $\frac{0}{0}$, para calcularlo se requiere aplicar el método de racionalización del denominador para cancelar la indeterminación. Este método se verá más adelante.

Cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$

El cálculo del $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ por sustitución directa es fácil de implementar, así que apliquémoslo una vez más para calcular el límite cuando $x \to 2$ de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

Observa que en la gráfica de la derecha, $f(x)$ no está definida en $x = 2$.



$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2 - \lim\limits_{x\to 2} 4}{\lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

¿Qué significa $\frac{0}{0}$? **No representa ningún valor numérico** y se le conoce como una indeterminación. ¿Por qué indeterminación? Viéndolo desde las operaciones de la aritmética, se puede dar respuesta de la siguiente manera:

¿Qué número multiplicado por cero es igual a cero? En símbolos (0)(   ) = 0.

Todo número real satisface dicha condición, por lo que hay una infinidad de números, por eso se le llama indeterminación. Ahora, cuando se presente una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ en el cálculo de un límite, según sea el caso, se sugiere implementar la factorización o la racionalización del denominador para cancelar la indeterminación, cómo se explica a continuación.

Estrategia para calcular límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$

1. Si la sustitución directa falla, continúa con el siguiente paso.
2. Prueba por factorización algebraica, para ello observa factores comunes que se puedan cancelar, para obtener una función equivalente (con el dominio restringido de la función original) y luego usar sustitución directa.
3. Racionaliza la función multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión a cancelar, para obtener una función equivalente (con el dominio restringido de la función original) y luego usar sustitución directa.
4. Si hay funciones trigonométricas, usa identidades o multiplica por una expresión equivalente a 1 para cambiar la función a otra equivalente con el dominio restringido de la función original y luego usar sustitución directa.
5. Si las técnicas anteriores fallan, prueba con métodos gráficos y numéricos.

Cálculo de límites por factorización

Una vez comprobado que falla la sustitución directa en el cálculo del $\lim_{x \to c} f(x)$, de acuerdo con la estrategia para calcular límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$, una opción es factorizar el numerador o el denominador de $f(x)$, luego, identificar los factores que son ceros (factores que al evaluarlos en $x = c$ se hacen cero), y por último, simplificar y obtener el límite.

Ejemplo formativo 1.10

Calcula el $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Resolución

Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to 2} (x^2 - 4)}{\lim_{x \to 2} (x - 2)} = \frac{\lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} 4}{\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Aplica la factorización para cancelar la indeterminación.

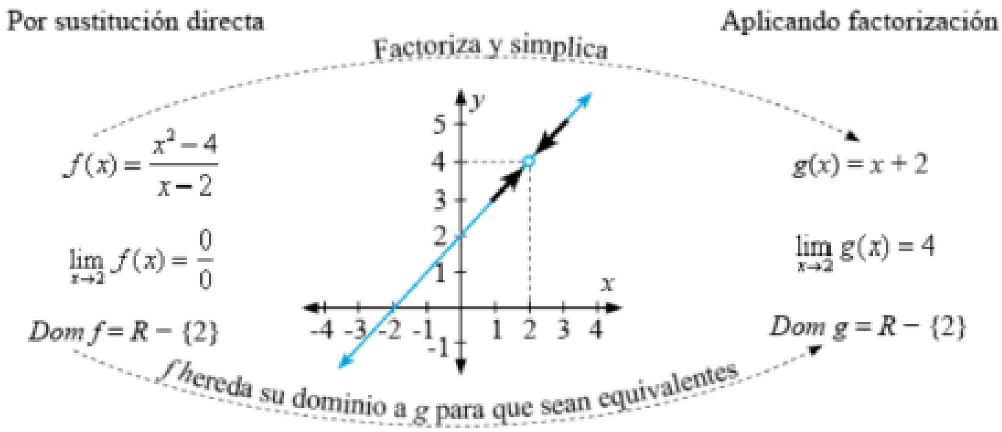
Factorizar la diferencia de cuadrados

$x - 2$ es un factor cero porque $2 - 2 = 0$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 2 = 2 + 2 = 4$$

$x - 2$ es un factor cero porque $2 - 2 = 0$

En el Ejemplo formativo 1.10, mediante el proceso de factorización y simplificación se llega a la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$ con $Dom\ f = \mathcal{R} - \{2\}$. A continuación, se muestra el efecto de la factorización en el cálculo del límite.



Si graficas las funciones f y g, observa que las representaciones gráficas son equivalentes salvo en el punto (2, 4). Para que f y g sean equivalentes, g se restringe al dominio de f, y así se tiene la igualdad $g(x) = x + 2$ con $Dom\ g = \mathcal{R} - \{2\}$, la cual no presenta una indeterminación en $x = 2$, solo no está definida, pero eso no afecta el cálculo del límite, por lo que se puede calcular por sustitución directa.

En resumen, al aplicar un método algebraico para calcular el límite de $f(x)$, se obtiene una función equivalente $g(x)$, salvo en un punto, a la que se le pueda calcular el límite por sustitución directa.

Para calcular los límites de las funciones del Ejemplo formativo 1.11, se asume que su dominio está restringido, aunque no se hace explicito.

Ejemplo formativo 1.11

Calcula el $\lim_{x\to -3} \frac{3+x}{27+x^3}$

Resolución

Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x\to -3} \frac{3\ +\ x}{27\ +\ x^3} = \frac{\lim_{x\to -3} 3 + x}{\lim_{x\to -3} 27 + x^3} = \frac{\lim_{x\to -3} 3 + \lim_{x\to -3} x}{\lim_{x\to -3} 27 + \lim_{x\to -3} x^3} = \frac{3 + (-3)}{27 + (-3)^3} = \frac{3-3}{27-27} = \frac{0}{0}$$

Aplica la factorización para cancelar la indeterminación.

$$\lim_{x\to -3} \frac{3\ +\ x}{27\ +\ x^3} = \lim_{x\to -3} \frac{\cancel{3+x}}{\cancel{(3+x)}(9-3x+x^2)} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{9-3x+x^2} = \frac{\lim_{x\to -3} 1}{\lim_{x\to -3} (9-3x+x^2)}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to-3} 9 - \lim\limits_{x\to-3} 3x + \lim\limits_{x\to-3} x^2} = \frac{1}{9-3(-3)+(-3)^2} = \frac{1}{27}$$

Ejemplo formativo 1.12

1. Calcula el $\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} \frac{3x^2+x-4}{3x^2+10x+8}$.

Resolución

Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x\to-\frac{4}{3}} \frac{3x^2 + x - 4}{3x^2 + 10x + 8} = \frac{\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} (3x^2 + x - 4)}{\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} (3x^2 + 10x + 8)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} (3x^2) + \lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} x - \lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} 4}{\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} (3x^2) + \lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} 10x + \lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} 8}$$

$$= \frac{3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right) + 4}{3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 10\left(-\frac{4}{3}\right) + 8} = \frac{\frac{16}{3} - \frac{4}{3} + 4}{\frac{16}{3} - \frac{40}{3} + 8} = \frac{4-4}{-8+8} = \frac{0}{0}$$

Aplica la factorización para cancelar la indeterminación.

$$\lim_{x\to-\frac{4}{3}} \frac{3x^2 + x - 4}{3x^2 + 10x + 8} = \lim_{x\to-\frac{4}{3}} \frac{\cancel{(3x+4)}(x-1)}{\cancel{(3x+4)}(x+2)} = \lim_{x\to-\frac{4}{3}} \frac{x-1}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} (x-1)}{\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} (x+2)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} x - \lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} 1}{\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} x + \lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}} 2} = \frac{-\frac{4}{3} - 1}{-\frac{4}{3} + 2} = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{3}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{6}{3}} = \frac{-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{7}{2}$$

Ejemplo formativo 1.13

1. Calcula el $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+1)^3-1}{x}$.

Resolución

Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} ((x+1)^3 - 1)}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^3 - \lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to 0} (x+1)\right)^3 - 1}{0}$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} 1\right)^3 - 1}{0} = \frac{(0+1)^3 - 1}{0} = \frac{(1)^3 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Desarrolla, simplifica y factoriza $(x+1)^3 - 1$

$(x+1)^3 - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x = x(x^2 + 3x + 3)$

Aplica la factorización para cancelar la indeterminación.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x^2+3x+3)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}(x^2+3x+3)=\lim_{x\to 0}x^2+\lim_{x\to 0}3x+\lim_{x\to 0}3$$
$$=0^2+3(0)+3=3$$

Cálculo de límites por racionalización

Una vez comprobado que falla la sustitución directa al calcular el $\lim_{x\to c} f(x)$, de acuerdo con la estrategia para calcular límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$, si hay radicales presentes, multiplicar por una expresión equivalente 1 a conveniencia, identificar los factores que son ceros (factores que al evaluarlos en $x=c$ se hacen cero), simplificar y obtener el límite.

¿Qué significa multiplicar por 1 a conveniencia para racionalizar? Implica tres aspectos:

1. El factor 1 se puede expresar como el cociente de dos números o expresiones algebraicas iguales diferentes de cero, por ejemplo:

   $1=\frac{5}{5}$, $1=\frac{-3}{-3}$, $1=\frac{x+1}{x+1}$ para $x\neq -1$, $1=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$ para $x>2$ multiplicativo de los números reales), por ejemplo:

   $(50)(1)=50$, $\left(-\frac{2}{5}\right)(1)=-\frac{2}{5}$, $(2x)(1)=2x$, $\left(6+\sqrt{x}\right)(1)=6+\sqrt{x}$ para $x\geq 0$.

2. Para racionalizar el numerador o denominador de una expresión algebraica, se multiplica por una expresión equivalente a 1 a conveniencia.
   Racionalizar el numerador

$$\frac{\sqrt{x}+5}{x-25}=\left(\frac{\sqrt{x}+5}{x-25}\right)(1)=\left(\frac{\sqrt{x}+5}{x-25}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-5}\right)=\frac{\cancel{x-25}}{(\cancel{x-25})\left(\sqrt{x}-5\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}-5}\text{ para }x\geq 0\text{ y }x\neq 25.$$

   En este ejemplo $\sqrt{x}-5$, es el conjugado de $\sqrt{x}+5$ y al multiplicarlos se aplica el producto de dos binomios conjugados $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

   Racionalizar el denominador

$$\frac{2x}{\sqrt{x}}=\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}\right)(1)=\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=\frac{2\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}}=2\sqrt{x}\text{ para }x\geq 0.$$

A continuación, se aplica la multiplicación por 1 a conveniencia al cálculo de límites.

Ejemplo formativo 1.14

1. Calcula el $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Resolución

Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\,-\,1}{x\,-\,1}=\frac{\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}\,-\,1\right)}{\lim_{x\to 1}(x\,-\,1)}=\frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{x}\,-\,\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}x\,-\,\lim_{x\to 1}1}=\frac{\sqrt{1}-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

Aplica la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\,-\,1}{x\,-\,1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}\,-\,1}{x\,-\,1}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\,1}{\sqrt{x}+\,1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x\,-\,1}}{(\cancel{x\,-\,1})\left(\sqrt{x}+\,1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+\,1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+\,1\right)}=\frac{\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1}1}=\frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 1}x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo formativo 1.15

1. Calcula el $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Resolución

Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x\to 9}\frac{x\,-\,9}{\sqrt{x}\,-\,3}=\frac{\lim_{x\to 9}(x\,-\,9)}{\lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x}\,-\,3\right)}=\frac{\lim_{x\to 9}x\,-\,\lim_{x\to 9}9}{\lim_{x\to 9}\sqrt{x}\,-\,\lim_{x\to 9}3}=\frac{9\,-\,9}{\sqrt{\lim_{x\to 9}x}\,-\,3}=\frac{0}{3-3}=\frac{0}{0}$$

Aplica la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación.

$$\lim_{x\to 9}\frac{x\,-\,9}{\sqrt{x}\,-\,3}=\lim_{x\to 9}\left(\frac{x\,-\,9}{\sqrt{x}\,-\,3}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\,3}{\sqrt{x}+\,3}\right)=\lim_{x\to 9}\frac{(\cancel{x\,-\,9})\left(\sqrt{x}+\,3\right)}{\cancel{x\,-\,9}}=\lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x}+\,3\right)$$

$$=\lim_{x\to 9}\sqrt{x}\,+\,\lim_{x\to 9}3=\sqrt{\lim_{x\to 9}x}+3=3+3=6$$

Ejemplo formativo 1.16

1. Calcula el $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.

Resolución

Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(1-\sqrt{x+1}\right)}{\lim_{x\to 0}x}=\frac{\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}}{\lim_{x\to 0}x}=\frac{1-\sqrt{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}}{0}$$

$$=\frac{1-\sqrt{0+1}}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Aplica la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=\frac{\lim_{x\to 0}(-1)}{\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\frac{-1}{\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{-1}{\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}}=\frac{-1}{1+\sqrt{1}}=-\frac{1}{2}$$

A continuación, analiza un ejemplo que te puede engañar si no exploras el dominio de la función o su representación gráfica.

Ejemplo formativo 1.17

1. Calcula el $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$.

Resolución

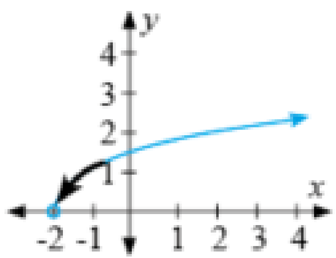
Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}=\frac{\lim_{x\to -2}(x+2)}{\lim_{x\to -2}\sqrt{x+2}}=\frac{\lim_{x\to -2}x+\lim_{x\to -2}2}{\sqrt{\lim_{x\to -2}x+\lim_{x\to -2}2}}=\frac{-2+2}{\sqrt{-2+2}}=\frac{0}{\sqrt{0}}=\frac{0}{0}$$

Aplica la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\sqrt{x+2}}{\cancel{x+2}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \sqrt{x + 2} = \sqrt{\lim_{x \to -2} x + \lim_{x \to -2} 2} = \sqrt{-2 + 2} = 0$$



Observa en la gráfica de la izquierda el dominio de $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$, ¡no hay valores para aproximarse a -2 por la izquierda! En consecuencia, el $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$ no existe. Solo existe el $\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$. Como resultado de lo anterior, antes de calcular un límite, es recomendable explorar el dominio de la función y su representación gráfica.

En los ejemplos vistos, aplicar la multiplicación por 1 a conveniencia al igual que la factorización, sirve para cancelar factores que ocasionan la indeterminación, y así obtener una función equivalente salvo en un punto, a la que se le pueda calcular el límite por sustitución directa.

Cálculo de límites trigonométricos especiales

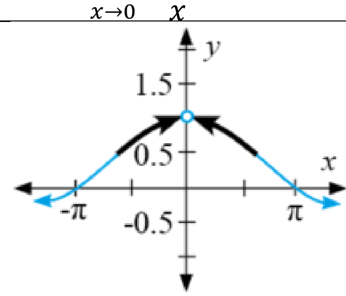
En el cálculo de límites de funciones trigonométricas, en los que, mediante la factorización, racionalización o uso de identidades trigonométricas, no es posible cancelar los factores que causan la indeterminación, una alternativa, pueden ser las siguientes fórmulas especiales:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ y \ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Ejemplo formativo 1.18

1. Verificar mediante métodos gráficos y numéricos que el $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (no es una demostración formal).

Resolución

<table>
<tr>
<th>$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$</th>
<th>$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$</th>
<th>$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$</th>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$</th></tr>
<tr><td>–0.1</td><td>0.99833417</td></tr>
<tr><td>–0.01</td><td>0.99998333</td></tr>
<tr><td>–0.001</td><td>0.99999983</td></tr>
<tr><td>–0.0001</td><td>0.99999999</td></tr>
</table>
</td>
<td>


</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$</th></tr>
<tr><td>0.1</td><td>0.99833417</td></tr>
<tr><td>0.01</td><td>0.99998333</td></tr>
<tr><td>0.001</td><td>0.99999983</td></tr>
<tr><td>0.0001</td><td>0.99999999</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Dado que los límites laterales son iguales a 1, entonces el $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Para demostrar que el $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, se usan métodos analíticos, en particular, la múltiplicación por 1 a conveniencia, la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y el límite especial $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, para obtener una función equivalente a partir de la cual se calcule el límite por sustitución directa.

Ejemplo formativo 1.19

Demostrar que el $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$.

Desmosración

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x}{\lim_{x \to 0} (1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} 0}{1+\cos 0} = \frac{0}{2} = 0$$

Por lo tanto $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$.

Ejemplo formativo 1.20

1. Calcula el $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.

Resolución

Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \frac{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} 3x}{\lim_{x \to 0} x} = \frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplica los límites trigonométricos especiales para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \left(\frac{3}{3}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

Ejemplo formativo 1.21

1. Calcula el $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 5x}{x}$.

Resolución

Aplica sustitución directa.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 5x}{x} = \frac{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2 5x}{\lim_{x \to 0} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplica los límites trigonométricos especiales para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{x} = \left(\frac{5}{5}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos 5x)(1 + \cos 5x)}{x}$$

$$= 5 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos 5x)(1 + \cos 5x)}{5x} = 5 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos 5x)}{5x} \cdot \lim_{x \to 0} (1 + \cos 5x)$$

$$= 5 \cdot 0 \cdot (1 + \cos 0) = 0$$

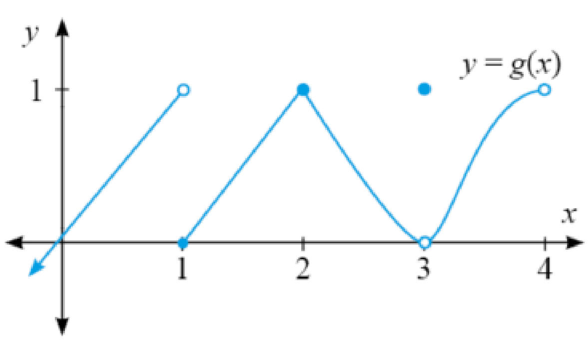
Para determinar límites trigonométricos se requiere de la habilidad para trabajar con expresiones algebraicas, así como del conocimiento de identidades trigonométricas. Pongamos a prueba tus conocimientos para calcular los siguientes límites.

Evaluación formativa 1.1

1. Grafica las siguientes funciones y determina su dominio y rango.
   a) $f(x) = (x + 3)^3 - 2$ b) $g(x) = \sqrt{x - 3} + 2$ c) $h(x) = 1 - \ln x$

2. Calcula los siguientes límites.
   a) $\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}$ b) $\lim_{x \to 2} \frac{|x - 2|}{x^2 + x - 6}$ c) $\lim_{x \to -1} \sqrt{1 - x^2}$

3. A partir de la siguiente gráfica de $g(x)$ determina los siguientes límites.



a) $\lim_{x \to 1} g(x) =$

b) $\lim_{x \to 2} g(x) =$

c) $\lim_{x \to 3} g(x) =$

d) $\lim_{x \to 4} g(x) =$

4. Determina los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + x}{x + 1}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ c) $\lim_{x\to -5} \frac{x^2 - 3x - 10}{2x^2 - 15x + 25}$

d) $\lim_{x\to 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$ e) $\lim_{x\to 13} \frac{\sqrt{x-4} - 3}{x - 13}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

PA 2. Límites infinitos y límites en el infinito

Progresión de aprendizaje 2				
Evalúa el comportamiento de funciones en situaciones de límites infinitos y límites en el infinito, interpretando sus implicaciones en el contexto de problemas.				
Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

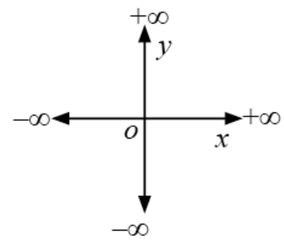
Evaluación diagnóstica 2.1

Selecciona la respuesta correcta en cada reactivo.

1. El resultado de simplificar la expresión $\frac{a^7}{a^3}$ es:
   a) a^{10} b) a^4 c) a^3 d) a
2. La función $f(x) = x^2 + 3x - 1$ es una función polinomial.
   a) Verdadero b) Falso
3. La función $g(x) = \frac{2x-1}{3x^4 - 2x + 3}$ es una función irracional.
   a) Verdadero b) Falso
4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta sobre el símbolo ∞ en matemáticas?
   a) ∞ representa un número real muy grande.
   b) ∞ es un concepto que indica un valor sin límite.
   c) ∞ es el valor máximo que un número real puede alcanzar.
   d) ∞ es un número finito utilizado en cálculos precisos.

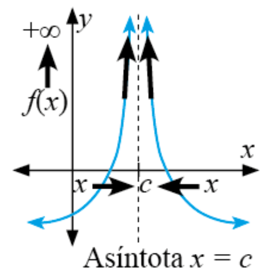
5. El valor del límite $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 16}{x - 4}$ es:
   a) 4 b) 0 c) –4 d) No existe

El sistema de coordenadas cartesianas (rectangulares) de la imagen de la derecha, está formado por el eje de las abscisas "x" y por el eje de las ordenadas "y". Haciendo una analogía de cada eje con la recta numérica, hacia la derecha se prolongan al infinito y hacia la izquierda a menos infinito.

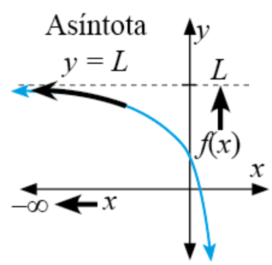


El infinito se denota con el símbolo "∞", que representa el comportamiento de un valor numérico cuando este se hace extremadamente grande en el sentido positivo o negativo de la recta numérica. Con base en lo anterior:

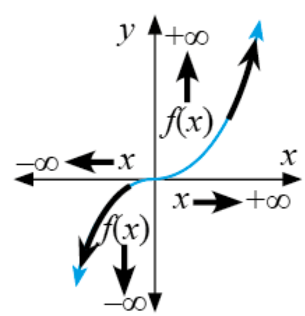
- En el estudio del **límite infinito** $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, decir que el límite de una función es infinito o menos infinito, en símbolos es simplemente otra forma específica de decir que el límite no existe. Este tipo de límite se usa para determinar si una función tiene una **asíntota vertical** $x = c$ como en la gráfica de la derecha. Es decir, en funciones que se aproximan a +∞ o –∞, a medida que los valores de x se aproximan a la asíntota $x = c$ por la izquierda y/o por la derecha de c.



- En el estudio del **límite en el infinito** $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$, decir que x se aproxima a +∞ o –∞, en símbolos es simplemente una forma específica de decir que x se hace extremadamente grande en el sentido positivo o negativo de la recta numérica. Este tipo de límite se usa para determinar si una función tiene una **asíntota horizontal** $y = L$, como en la gráfica de la derecha. Es decir, en funciones que se aproximan a L, a medida que los valores de x se aproximan a +∞ por la izquierda o a –∞ por la derecha.

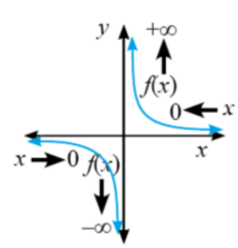


- En el estudio del límite infinito en el infinito $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, decir que el límite de una función dada es infinito o menos infinito, cuando x se aproxima a +∞ o –∞, en símbolos es simplemente una forma específica de decir que cuando x se hace extremadamente grande en el sentido positivo o negativo de la recta numérica, el límite de la función no existe, como se muestra en la gráfica de la derecha.

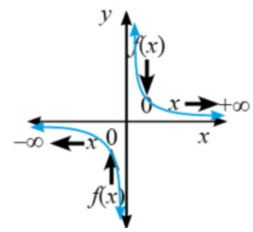


Por ejemplo, en la función $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$, tenemos que:

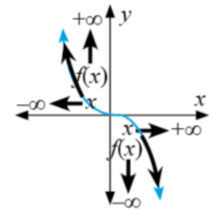
- El $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y el $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, por lo que tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$, ver gráfica de la derecha.



- El $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ y el $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, por lo que tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$, ver gráfica de la derecha.



- Y para la función $f(x) = -x^3$ tenemos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (como se muestra en la gráfica de la derecha), por lo que dichos límites no existen.



Límites infinitos

Para el estudio de límites infinitos $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, se debe tener en cuenta los tipos comunes del comportamiento de $f(x)$ asociados a la no existencia del $\lim_{x\to c} f(x)$, cuando la función crece o decrece indefinidamente. Aunque el límite no exista, es útil para determinar la **asíntota vertical** de una función. Una **asíntota** es una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de una función, y a medida que se extiende indefinidamente la distancia entre ellas tiende a cero.

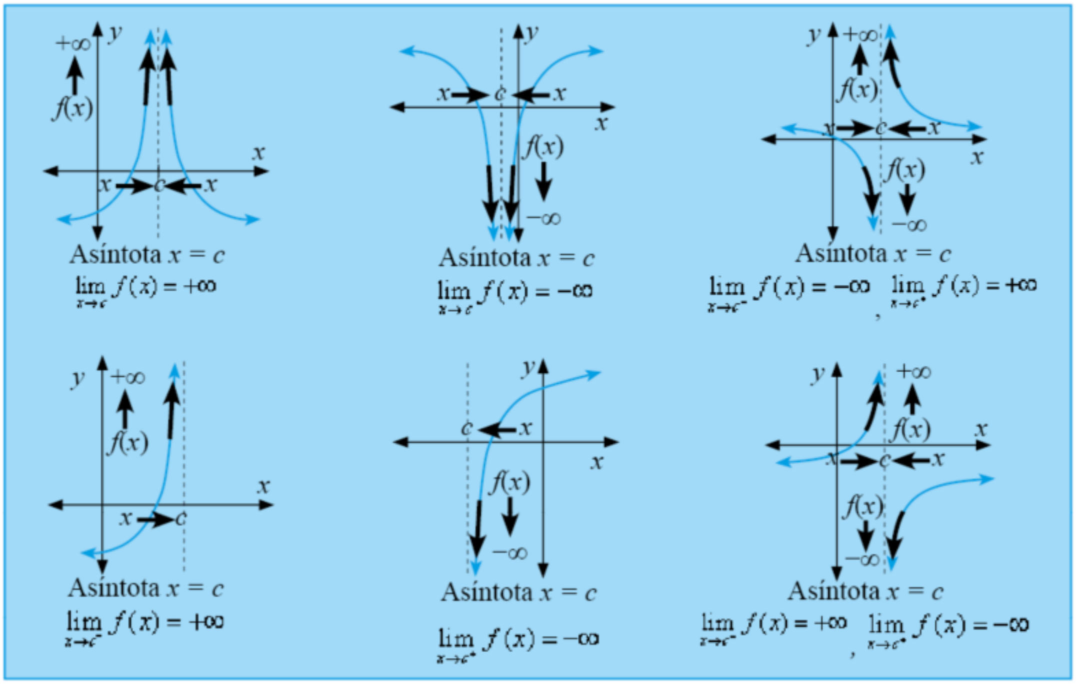
> Si en una función f, uno de los límites laterales tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando $x\to c$, entonces $x = c$ es una asíntota vertical de f.

En los límites infinitos del tipo $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, siempre aparece una **asíntota vertical en $x = c$**, en consecuencia, se satisface al menos uno de los siguientes casos:

$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

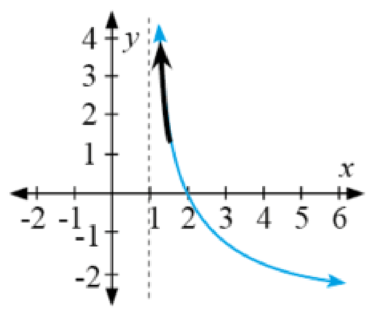
Si el límite de f cuando $x\to c$, tiende a $+\infty$, en la graficación de funciones, su interpretación es que la función crece de manera asintótica, y si el límite tiende a $-\infty$, la función decrece de manera asintótica. Otro aspecto a considerar es si x se está acercando a c por la derecha o por la izquierda. A continuación, se muestran algunos de los casos que se presentan en funciones con asíntotas verticales.



La función logaritmo es una de las funciones que tiene una asíntota vertical.

Ejemplo formativo 2.1

1. Determina el $\lim\limits_{x\to 1^+} \log_{1/2}(x-1)$.



Resolución

De la gráfica de la derecha, cuando $x\to 1^+$, $f(x) \to +\infty$.

Por lo que $x = 1$ es una asíntota vertical de f.

En consecuencia, el $\lim\limits_{x\to 1^+} \log_{1/2}(x-1) = +\infty$.

Otras funciones que tienen asíntotas verticales son el cociente de funciones $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, siempre y cuando $g(c) \neq 0$ y $h(c) = 0$ (en $x = c$ hay un **salto infinito**), entonces $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = c$. Aplica lo anterior para realizar los siguientes ejemplos.

En los siguientes ejemplos formativos calcularemos el límite mediante métodos numéricos, para conocer si la función crece o decrece sin límite cuando tiene una asíntota vertical.

Ejemplo formativo 2.2

1. Determina el comportamiento de la función $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ cuando $x\to 3$ por la izquierda y derecha.

Resolución

Aplica sustitución directa: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)}=\frac{3+3}{3^2-9}=\frac{6}{0}$.

Ahora, aplica métodos numéricos para explorar el comportamiento de la función f en $x = 3$.

x	$f(x)$
2.999	–1000
2.9999	–10000
2.99999	–100000

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x+3}{x^2-9}=-\infty$$

La función f decrece indefinidamente por la izquierda de la asíntota $x = 3$, y crece indefinidamente por la derecha. Esto significa que en $x = 3$ hay una asíntota vertical.

x	$f(x)$
3.001	1000
3.0001	10000
3.00001	100000

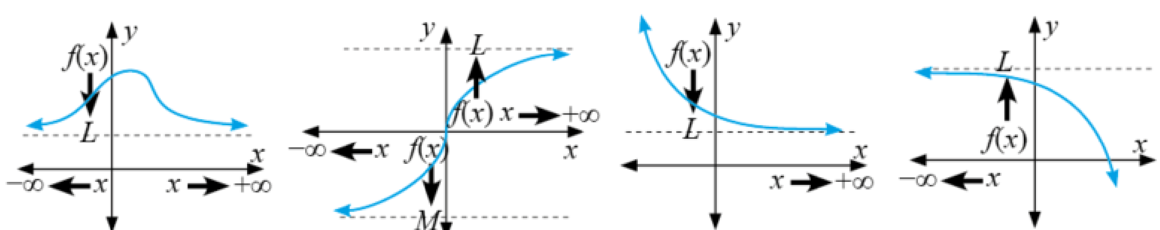
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x+3}{x^2-9}=+\infty$$

Límites en el infinito

El estudio de límites del tipo $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ lo identificamos con el cálculo de la ecuación de la **asíntota horizontal** (si existe) de una función.

> Si en una función f el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ o ambos, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de f.

Una función puede tener infinitas asíntotas verticales, como es el caso de las funciones $f(x) = \tan x$ y $f(x) = \cot x$. Sin embargo, una función solo puede tener como máximo dos asíntotas horizontales, ¿por qué? Algunos de los comportamientos de la asíntota horizontal, se muestran a continuación.



Asíntota $y = L$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

Asíntotas $y = L$ y $y = M$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=M$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

Asíntota $y = L$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

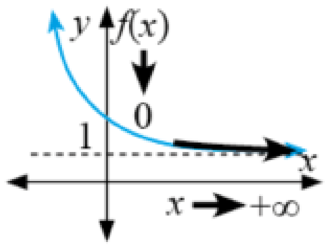
Asíntota $y = L$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

Recordemos que la función logaritmo tiene una asíntota vertical, y su función inversa, que es la función exponencial, tiene una asíntota horizontal.

Ejemplo formativo 2.3

1. Determina la ecuación de la asíntota horizontal de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$, la cual es una traslación de la función básica $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

   Resolución



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1.$

Límite por la izquierda

x	$f(x)$
10	1.0009765625
30	1.00000000093
50	1.00000000000000089

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right) = 1$$

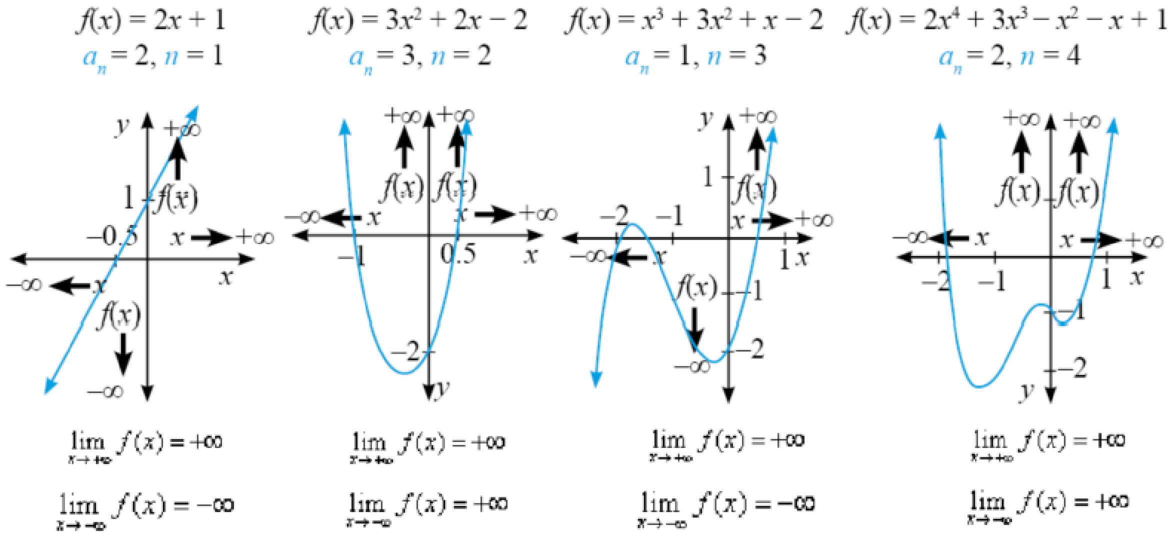
De la gráfica de la izquierda y de los valores de la tabla, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to 1$.

Por lo que $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

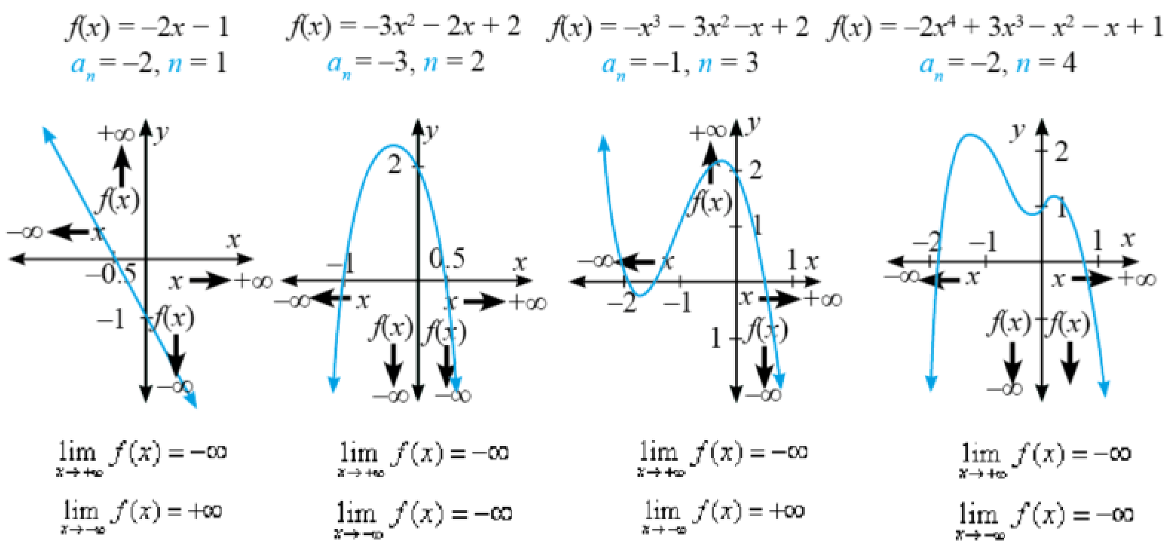
En el caso de las funciones racionales $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}$, donde $q(x) \neq 0$, para determinar las asíntotas horizontales mediante el cálculo de límites en el infinito, primero necesitamos conocer el comportamiento del $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)$ de funciones polinomiales de grado mayor que cero, y luego el comportamiento de los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n}$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^n}$, para $n \in N$ y $k \in Z$.

El límite de una función racional

Para conocer el comportamiento en el infinito de las funciones racionales, veamos primero el caso de las funciones polinomiales $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ para $n > 0$ y $a_n \neq 0$. A continuación, exploremos su representación gráfica, así como, su reflexión sobre el eje de las abscisas para identificar regularidades relacionadas con el signo del coeficiente "a_n" y el grado "n", y a partir de ellas establecer las condiciones para determinar el $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)$.



A continuación, exploremos las reflexiones sobre el eje de las abscisas de las funciones polinomiales anteriores.



A partir de explorar el signo del coeficiente "a_n" y el grado "n" de una función polinomial cuando $x \to \pm\infty$, se obtienen las siguientes regularidades.

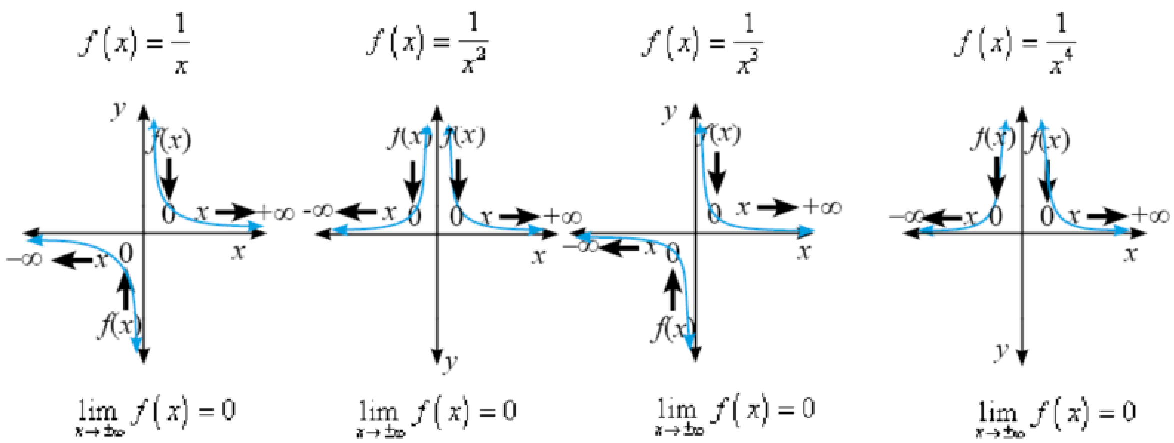
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \text{ y } n \text{ par} \\ +\infty, & \text{si } a_n < 0 \text{ y } n \text{ impar} \\ -\infty, & si\ a_n > 0 \text{ y } n \text{ impar} \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \text{ y } n \text{ par} \end{cases}$$

La utilidad del resultado anterior se refleja en el cálculo del siguiente límite:

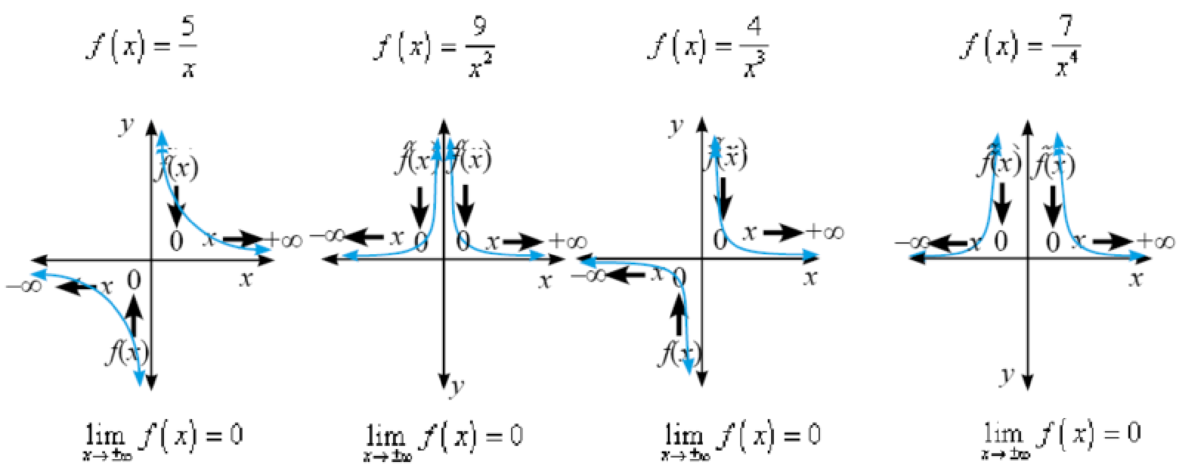
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

El cual depende del signo del coeficiente “a_n” y del grado “n” de cada función polinomial. Para cancelar las variables de los términos del numerador y del denominador que ocasionan dicha indeterminación, se necesita del resultado de los siguientes límites.

En las siguientes gráficas explora el límite $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n}$.



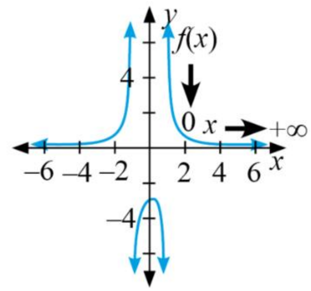
En las siguientes gráficas explora el límite $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{k}{x^n}$.



Como resultado de la exploración, se tiene que el $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ y $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ (su demostración requiere de la definición formal del límite, por lo que se deja para cursos avanzados de cálculo). Como ya se mencionó, estos límites se usan para cancelar las variables que ocasionan la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que aparece al calcular el $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0}$ de una función racional. Veamos los siguientes ejemplos formativos.

Situación 1. El grado del polinomio del numerador "n" es **menor que** el grado del denominador "m".

Ejemplo formativo 2.4



1. Calcula el $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1}$.

Resolución

Aplica el límite de un polinomio en el infinito.

En el numerador $a_n = 2$, $n = 2$ y en el denominador $b_m = 1$, $m = 4$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 - x + 3)}{\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 1)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para cancelar la indeterminación divide cada término del numerador y del denominador por la variable de mayor grado "x^4", luego, aplica los límites $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x^n}$ y $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{k}{x^n}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4} + \frac{3}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} - \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x^{4-2}} - \frac{1}{x^{4-1}} + \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^{4-4}} - \frac{1}{x^4}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^0} - \frac{1}{x^4}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^4}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Dado que el $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1} = 0$, la función $f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1}$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, como se muestra en la gráfica anterior.

Situación 2. El grado del polinomio del numerador "n" es **igual al** grado del denominador "m".

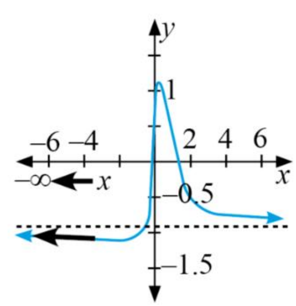
Ejemplo formativo 2.5

1. Calcula el $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^2 - 4x - 2}{-6x^2 - x - 2}$.

Resolución

Aplica el límite de un polinomio en el infinito.

En el numerador $a_n = 5$, $n = 2$ y en el denominador $b_m = -6$, $m = 2$.



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-2}{-6x^2-x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^2-4x-2)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(-6x^2-x-2\ )}=\frac{+\infty}{-\infty}$$

Para cancelar la indeterminación divide cada término del numerador y del denominador por la variable de mayor grado "x^2", luego, aplica los límites $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x^n}$ y $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{k}{x^n}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-2}{-6x^2-x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{-\frac{6x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x^{2-2}}-\frac{4}{x^{2-1}}-\frac{2}{x^2}}{-\frac{6}{x^{2-2}}-\frac{1}{x^{2-1}}-\frac{2}{x^2}}$$

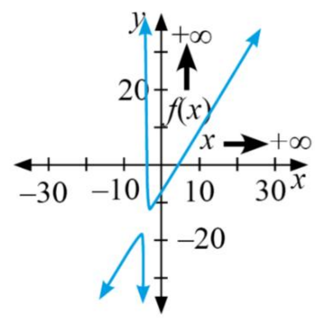
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x^0}-\frac{4}{x^1}-\frac{2}{x^2}}{-\frac{6}{x^0}-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{1}-\frac{4}{x^1}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{6}{1}-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}5-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^1}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty}(-6)-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}}=\frac{5-0-0}{-6-0-0}=-\frac{5}{6}$$

Dado que el $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-2}{-6x^2-x-2}=-\frac{5}{6}$, la función $f(x)=\frac{5x^2-4x-2}{-6x^2-x-2}$ tiene una asíntota horizontal en $y=-\frac{5}{6}$, como se muestra en la gráfica anterior.

Situación 3. El grado del polinomio del numerador "n" es **mayor que** el grado del denominador "m".

Ejemplo formativo 2.6



1. Calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+3x+25}{-x-3}$.

Resolución

Aplica el límite de un polinomio en el infinito.

En el numerador a_n = -2, n = 2 y en el denominador $b_m=-1$, m = 1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+3x+25}{-x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2+3x+25)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-3\ )}$$

$$=\frac{-\infty}{-\infty}$$

Para cancelar la indeterminación divide cada término del numerador y del denominador por la variable de mayor grado "x^2", luego, aplica los límites $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x^n}$ y $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{k}{x^n}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+3x+25}{-x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{25}{x^2}}{-\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^{2-2}}+\frac{3}{x^{2-1}}+\frac{25}{x^2}}{-\frac{1}{x^{2-1}}-\frac{3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x^0}+\frac{3}{x}+\frac{25}{x^2}}{-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{1}+\frac{3}{x}+\frac{25}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty}(-2)+\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{25}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}} = \frac{-2+0+0}{0-0} = \frac{-2}{0}$$

Dado que el $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+3x+25}{-x-3} = -\frac{2}{0}$, se tiene una indeterminación, por lo que el límite no existe, es decir, $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+3x+25}{-x-3} = +\infty$, dado que $\frac{-2x^2}{-x} = 2x > 0$ cuando $x \to +\infty$. Además, la función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales, como se muestra en la gráfica anterior.

Los resultados de los Ejemplos formativos 2.4, 2.5 y 2.6 se pueden obtener sin realizar todos esos procedimientos algebraicos. Para ello, es necesario demostrar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Ejemplo formativo 2.7

1. Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ una función polinomial con $a_n \neq 0$. Demostrar que el $\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$.

Demostración

Primero, expresa la función $f(x)$ de tal forma que se le pueda aplicar el límite $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{k}{x^n}$ para $n \in N$ y $k \in Z$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^{n-(n-1)} + a_0 x^{n-n} \\
&= a_n x^n + a_{n-1}x^n x^{-1} + a_{n-2}x^n x^{-2} + \cdots + a_1 x^n x^{-(n-1)} + a_0 x^n x^{-n} \\
&= x^n\left(a_n + a_{n-1}x^{-1} + a_{n-2}x^{-2} + \cdots + a_1 x^{-(n-1)} + a_0 x^{-n}\right) \\
&= x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)
\end{aligned}$$

Luego aplica el límite.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n \cdot \left(\lim_{x\to\pm\infty} a_n + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-1}}{x} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n \cdot (a_n + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n \cdot (a_n)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Ahora, aplica el resultado anterior al cálculo del límite de una función racional.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

A partir del resultado del Ejemplo formativo 2.7, y el de los Ejemplos formativos 2.4, 2.5 y 2.6, se obtiene la siguiente estrategia para calcular límites en el infinito de funciones racionales.

Estrategia para calcular límites en el infinito de funciones racionales

Sea f una función racional definida por el cociente de dos polinomios.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}, \text{ donde } q(x) \neq 0.$$

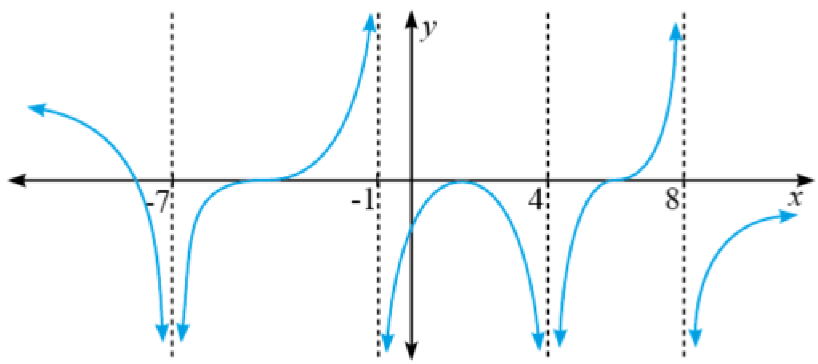
1. Si el grado del numerador "n" es **menor que** el grado del denominador "m", entonces el límite es 0, en símbolos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Hay una **asíntota horizontal** en $y = 0$.
2. Si el grado del numerador "n" es **igual** al grado del denominador "m", entonces el límite es el coeficiente del término principal del numerador dividido por el coeficiente del término principal del denominador, en símbolos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$. Hay una **asíntota horizontal** en $y = \frac{a_n}{b_m}$.
3. Si el grado del numerador "n" es **mayor que** el grado del denominador "m", entonces el límite no existe, en símbolos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. **No hay asíntotas horizontales**.

A continuación, aplica la estrategia propuesta para calcular límites en el infinito de funciones racionales.

Evaluación formativa 2.1

1. Decir qué significa:
   a) $x \to -\infty$ ________________________________.
   b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ ________________________________.
   c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ________________________________.

2. Para la función h cuya gráfica se muestra a continuación, calcula lo siguiente.
   a) $\lim_{x \to -7} h(x)$
   b) $\lim_{x \to -1^+} h(x)$
   c) $\lim_{x \to -1^-} h(x)$
   d) $\lim_{x \to 4} h(x)$
   e) $\lim_{x \to 8^-} h(x)$
   f) $\lim_{x \to 8^+} h(x)$



3. Usa el límite para determinar las asíntotas verticales de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = -\frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

   a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ f) $f(x) = \ln x - 3$ g) $h(r) = \frac{2r + 3}{r - 8}$ h) $g(t) = \frac{t + 2}{t^2 - 4}$

   i) $g(s) = \frac{\sqrt{s}}{9 - s^2}$ j) $h(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ k) $f(r) = \frac{r^2 - 3r + 6}{r^2 - 12r + 20}$ l) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$

4. Explica por qué las asíntotas horizontales pueden intersecar más de una vez a la representación gráfica de una función.
5. Aplica el límite en el infinito para determinar las asíntotas horizontales (si existen) de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = \frac{x}{x - 7}$ b) $g(t) = \frac{4t}{4t - 7}$ c) $h(s) = \frac{s^2 - 2s}{s}$

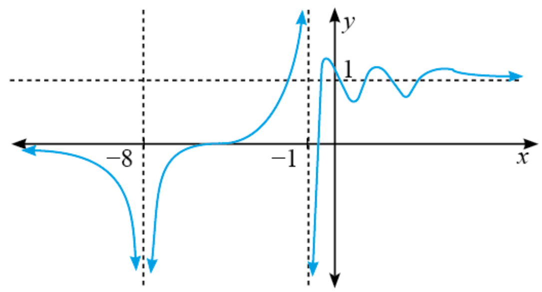
   d) $f(t) = \frac{4t - 10}{t^2 - 2t - 15}$ e) $h(t) = -\frac{1}{(t + 1)^2}$ f) $h(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x - 4}$

   g) $f(s) = \frac{-s^4 + 3s - 92}{s^2 - 7s - 44}$ h) $g(t) = \frac{3t}{t^2 - 2}$ i) $f(s) = \frac{3s^2 - 6s + 4}{-s^2 + 4s - 3}$

   j) $g(t) = \frac{t^2 - 5t - 9}{2t^4 + 3t^3}$ k) $h(x) = \frac{x^9 + x^3 + x}{x^6 + x^2 + 1}$ l) $h(t) = \frac{-3t^4 - 2t + 1}{-4t^5 - t^2 + t}$

m) $f(x) = \frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x}$ n) $g(s) = \frac{3s^3 + 4s^2 - s + 1}{-s^2 + 1}$ ñ) $h(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + \frac{1}{2}}$

6. Utiliza la gráfica de la derecha para determinar los siguientes límites:
   a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
   b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$



7. Traza la representación gráfica de una función $y = f(x)$ que satisfaga las siguientes condiciones.
   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

La importancia del límite no solo radica en explorar el comportamiento de una función en un punto o en el infinito, pues, son la base en el estudio de las funciones continuas, funciones cuya característica principal es que se pueden trazar sin despegar el lápiz de la hoja, de lo contrario, la función se clasifica como discontinua, es decir, presenta un hueco, un salto finito o un salto infinito. Las funciones continuas se estudian en la siguiente progresión de aprendizaje.

PA 3. Funciones continuas

Progresión de aprendizaje 3
Analiza la continuidad de funciones en puntos específicos, distinguiendo entre los tipos de discontinuidades y sus implicaciones en el modelado de fenómenos.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

Actividad diagnóstica 3.1

Selecciona la respuesta correcta.

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x-5}$, ¿cuál es el dominio de la función?

   a) $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$ b) $(-\infty, +\infty)$ c) $[5, +\infty)$ d) $(-\infty, 5]$

2. Dada la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, ¿cuál es el valor de $f(3)$?

   a) 7 b) 5 c) 0 d) f no está definida en $x = 3$

3. ¿Cuál es el valor del límite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$?

   a) 2 b) 4 c) 0 d) No existe

Continuidad en un punto

En el estudio de las funciones numéricas, el concepto de función continua es muy importante y útil. Estas funciones tienen generalmente un comportamiento "suave", sin saltos ni interrupciones, lo que las hace ideales para describir situaciones del mundo real.

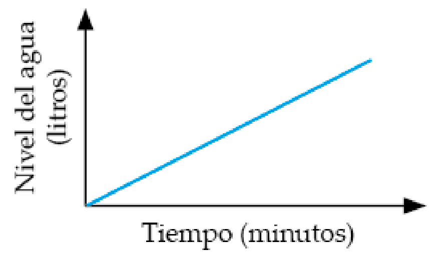
Te preguntarás, **¿qué es una función continua?** Imagina que estás dibujando una línea sin levantar el lápiz del papel. Esa línea representa una función continua.

En otras palabras, una función continua es aquella que puedes dibujar de un solo trazo, sin "saltos" ni "huecos".

Para entender mejor qué es una función continua, pensemos en el llenado de una piscina con una manguera.

La variable independiente x es el tiempo transcurrido desde que empezamos a llenar la piscina. La variable dependiente y es la cantidad de agua en la piscina.

Al graficar la siguiente situación obtendrás una función continua:



- Al inicio ($x = 0$), la piscina está vacía ($y = 0$).
- A medida que pasa el tiempo, el nivel de agua aumenta de manera constante.
- Obtienes la gráfica de la derecha, que es una línea recta que sube suavemente, sin saltos ni interrupciones.

Esta es una función continua porque:

- Podemos dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel.
- Para cada momento en el tiempo, hay una cantidad correspondiente de agua en la piscina.
- No hay "saltos" repentinos en la cantidad de agua.

Matemáticamente, podemos expresar esta función como $y = kx$.

Donde:

- y es la cantidad de agua en la piscina (en litros).
- x es el tiempo transcurrido (en minutos).
- k es la tasa de llenado (litros por minuto).

Esta función es continua para todos los valores de $x \geq 0$, lo que significa que podemos calcular la cantidad de agua en la piscina para cualquier momento desde que empezamos a llenarla.

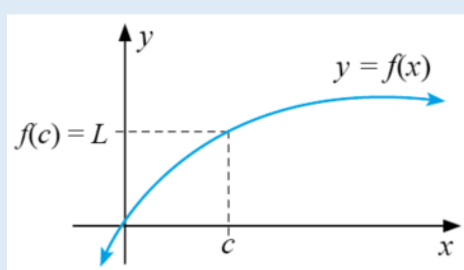
Definición de continuidad en $x = c$

La función f es continua en el número real c, si:

i) $f(c)$ está definida en $x = c$,

ii) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, y

iii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

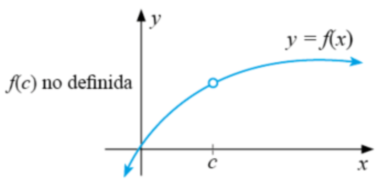


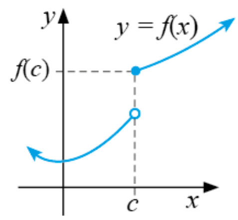
Si una de las condiciones de la definición de continuidad en el punto no se satisface, se dice que la función es discontinua en $x = c$. Esta discontinuidad en $x = c$ puede ser:

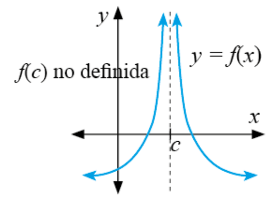
a) Evitable

b) De salto finito no evitable

c) de salto infinito no evitable







Al explorar el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$, hacemos énfasis en los valores de f cercanos a c, en vez de lo que le sucede a la función en $x = c$. En el caso de la continuidad de una función en un punto, sí hacemos énfasis en lo que le sucede a f en $x = c$, es decir, se explora el comportamiento de f en $x = c$ para ver si se satisface la condición $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

A partir de la representación gráfica de la Actividad formativa 3.1, determinamos si la función a trozos $y = g(x)$ es continua en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

- ¿Cuáles de estos valores de x pertenecen al dominio de g?
- ¿En cuáles g es continua?
- Si un valor de x está en el dominio de g, ¿es condición suficiente para que sea continua en dicho valor?

Una condición necesaria para qué g sea continua en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, es que dichos valores estén en el dominio de g, es decir, que $g(-3)$, $g(-2)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ y $g(3)$ estén definidos, pero esto no es suficiente. Veamos si la existencia del límite en un punto es condición suficiente para asegurar la continuidad de g en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

- ¿En cuáles de estos valores de x existe el límite?
- ¿En cuáles g es continua?
- Si el límite de g existe en un valor dado de x, ¿es condición suficiente para que sea continua en dicho valor?

Otra condición necesaria para que g sea continua en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, es que el límite exista en dichos valores de x, pero esto tampoco es suficiente.

Entonces, qué otra condición se necesita para que g sea continua en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Para darle respuesta, identifica los valores de x en los que se satisface que el $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$. Esta condición implica que $g(c)$ está definida y que el $\lim_{x \to c} g(x)$ existe.

A continuación, determinaremos la continuidad de una función en un punto a partir de la representación algebraica.

Ejemplo formativo 3.1

1. Verifica si $g(x) = \text{sen}\, x$ es continua en $x = 0$.
2. Verifica si $f(x) = \tan x$ es continua en $x = \frac{\pi}{2}$.

Resolución

1. Verifica si $g(x) = \text{sen}\, x$ es continua en $x = 0$.

Aplica la definición de continuidad.

- $g(0) = \text{sen}\, 0 = 0$, $g(0)$ está definida.
- $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \text{sen}\, x = \text{sen}\, 0 = 0$, el límite existe.
- $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$

Por lo tanto $g(x)$ es continua en $x = 0$.

2. Verifica si $f(x) = \tan x$ es continua en $x = \frac{\pi}{2}$.

Aplica la definición de continuidad.

- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan \frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no está definida.

Por lo tanto $f(x)$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$.

Discontinuidad removible y no removible

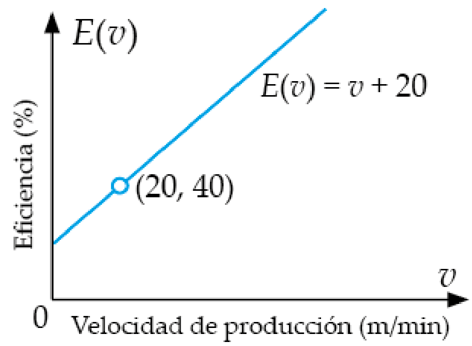
Las funciones presentan tres casos de discontinuidad en un punto: discontinuidad evitable (removible), discontinuidad de salto finito y discontinuidad de salto infinito no evitables (no removibles).

Ejemplo de discontinuidad removible en un punto.

Una fábrica de papel utiliza una máquina especializada para producir rollos de papel. Su eficiencia varía según la velocidad de producción. La fábrica necesita calcular la eficiencia para optimizar sus costos. La velocidad de producción se mide en metros por minuto (m/min), la eficiencia se mide en porcentaje y la máquina tiene un rango de operación de 1 a 100 m/min.

Los ingenieros han determinado que la eficiencia de la máquina se puede modelar con la siguiente función:

$$E(v) = \frac{v^2 - 400}{v - 20}, \text{para } v \neq 20$$



Donde $E(v)$ es la eficiencia en porcentaje y v es la velocidad de producción en m/min, cuya gráfica se muestra en la figura de la derecha.

La función $E(v)$ calcula la eficiencia para la mayoría de las velocidades sin problemas. Sin embargo, cuando $v = 20$ m/min, la función no se puede calcular directamente porque el denominador se hace cero. En la práctica, sabemos que la máquina debe tener una eficiencia cuando opera a 20 m/min. Si simplificamos la función algebraicamente, obtenemos:

$$E(v) = \frac{v^2 - 400}{v - 20} = v + 20, \text{para } v \neq 20$$

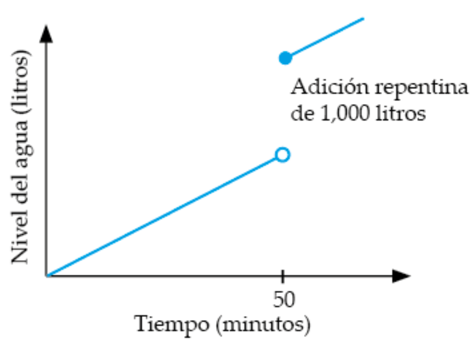
Lo anterior sugiere que la eficiencia a 20 m/min debería ser 20 + 20 = 40%. Por lo tanto, podemos evitar la discontinuidad definiendo $E(v) = 40\%$, así,

$$E(v) = \begin{cases} \dfrac{v^2 - 400}{v - 20} = v + 20, & \text{para } v \neq 20 \\ 40\%, & \text{para } v = 20 \end{cases}$$

Ejemplo de discontinuidad no removible con salto finito en un punto.

Retomamos el ejemplo del llenado de la piscina. Si estás llenándola normalmente, pero de repente, a los 50 minutos de llenado, viertes de golpe 1,000 litros adicionales de agua a la piscina:

- Hasta antes de $t = 50$ minutos, la función es continua y crece constantemente.
- En $t = 50$ minutos exactamente, hay un salto finito en la gráfica.
- Después de $t = 50$ minutos, la función continúa creciendo de forma constante desde el nuevo nivel.



En este escenario con discontinuidad, la gráfica anterior tiene un "salto finito" o cambio abrupto en $t = 50$ minutos, por lo que no puedes dibujarla completa sin levantar el lápiz. En está situación del llenado de la piscina, la gráfica de la función representa el caso de una discontinuidad de salto finito no removible.

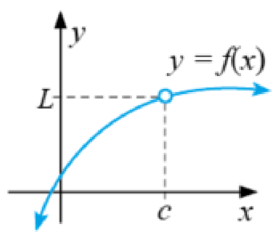
A continuación, puedes ver de forma gráfica los tipos de discontinuidad de una función en un punto.

Discontinuidad evitable. Una función f como la de las siguientes gráficas, tiene una discontinuidad evitable (removible) en $x = c$, si el límite existe, pero $f(c)$ no está definida o está desplazada hacia arriba o hacia abajo.

En la figura de la derecha hay un hueco en $x = c$

$f(c)$ no está definida

$\lim_{x \to c} f(x)$ existe

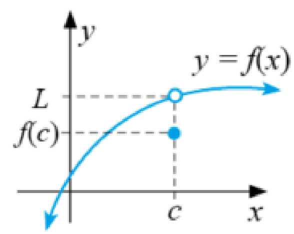


En la figura de la derecha hay un hueco y un punto desplazado en $x = c$

$f(c)$ está definida

$\lim_{x \to c} f(x)$ existe

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

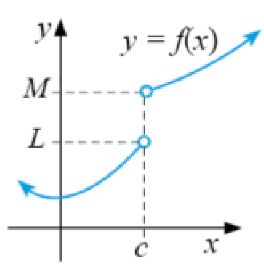


Discontinuidad inevitable de salto finito. Una función f como la de las siguientes gráficas, tiene una discontinuidad inevitable (no removible) de salto finito en $x = c$, si los límites laterales son diferentes (el límite no existe) esté o no definida $f(c)$.

En la figura de la derecha hay un salto finito en $x = c$

$f(c)$ no está definida

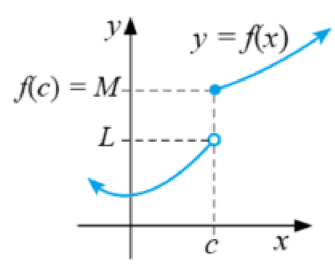
$\lim_{x \to c} f(x)$ no existe



En la figura de la derecha hay un salto finito en $x = c$

$f(c)$ está definida

$\lim_{x \to c} f(x)$ no existe

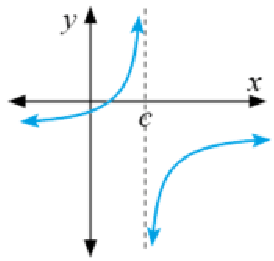


Discontinuidad inevitable de salto infinito. Una función f como la de las siguientes gráficas, tiene una discontinuidad inevitable (no removible) de salto infinito en $x = c$, si al menos uno de los límites laterales tiende a $+\infty$ o $-\infty$ (el límite no existe).

En la figura de la derecha hay un salto finito en $x = c$

$f(c)$ no está definida

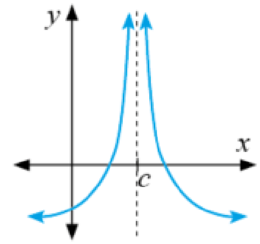
$\lim_{x \to c} f(x)$ no existe



En la figura de la derecha hay un salto finito en $x = c$

$f(c)$ está definida

$\lim_{x \to c} f(x)$ no existe



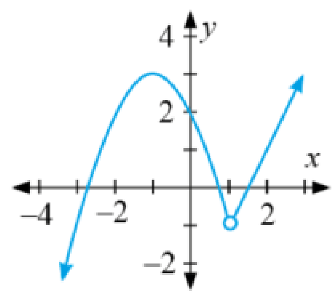
A continuación, se muestra un ejemplo formativo de una función que tiene una discontinuidad evitable en $x = c$.

Ejemplo formativo 3.2

1. Verifica si $h(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x > 1 \\ -x^2 - 2x + 2, & x < 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$, y si no, remueve la discontinuidad de ser posible.

Resolución

La función $h(1)$ no está definida, por lo tanto $h(x)$ es discontinua en $x = 1$.



De la gráfica de la derecha, la función $h(x)$ tiene un hueco en $x = 1$, por lo que la discontinuidad puede ser removida, definiendo $h(1) = -1$.

Verifica la definición de continuidad.

- $h(1) = -1$.
- $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^+} h(x) = -1$, en consecuencia $\lim_{x \to 1} h(x) = -1$. El límite existe.
- $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$

Para que $h(x)$ sea continua en $x = 1$, se redefine $h(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x > 1 \\ -x^2 - 2x + 2, & x < 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$

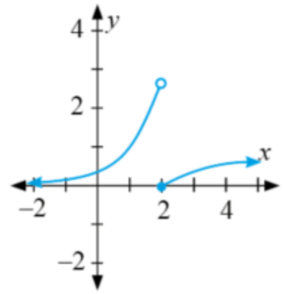
Ahora, mostramos un ejemplo de una función que tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = c$. En este tipo de funciones el límite no existe, en consecuencia, son discontinuas en $x = c$.

Ejemplo formativo 3.3

1. Verifica si $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 2 \\ \log(x-1), & x \geq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$, y si no, remueve la discontinuidad de ser posible.

Resolución

Aplica la definición de continuidad:



- $f(2) = \log\ (1) = 0,\ f(2)$ está definida.
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = e$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \log\ (1) = 0$, es decir, el $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

Por lo tanto, como se observa en la gráfica de la derecha, $f(x)$ es discontinua en $x = 2$.

Dado que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = e$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$, la función f tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 2$ que no puede ser removida.

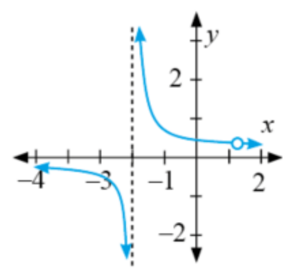
Por último, el siguiente ejemplo corresponde a una función que tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = c$. En este tipo de funciones el límite no existe, en consecuencia, son discontinuas en $x = c$.

Ejemplo formativo 3.4

1. Verifica si $g(x) = \frac{3x-4}{3x^2+2x-8}$ es continua en $x = -2$, y si no, remueve la discontinuidad de ser posible.

Resolución

Aplica la definición de continuidad:



$g(-2) = \frac{3(-2)-4}{3(-2)^2+2(-2)-8} = \frac{-10}{12-12} = -\frac{10}{0}$. Por lo que $g(-2)$ no está definida, en consecuencia, la función g es discontinua en $x = -2$, como se observa en gráfica de la derecha.

Luego, como el $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$, se concluye que la función g tienen una asíntota vertical en $x = -2$, por lo que esta tiene una discontinuidad de salto infinito no removible.

En los Ejemplos formativos 3.3 y 3.4, el límite de la función no existe en el valor de $x = c$, por lo tanto, las funciones son discontinuas en dicho punto, y la discontinuidad no se puede remover.

Continuidad en un intervalo

La continuidad de una función en un punto se puede generalizar a un intervalo abierto, cerrado o semiabierto.

Un intervalo abierto es un conjunto continuo de números reales que no contiene sus puntos extremos y se representa como (a, b), para $a, b \in \mathcal{R}$.

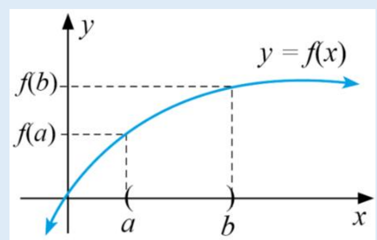
Un intervalo cerrado es un conjunto continuo de números reales que contiene sus puntos extremos y se representa como $[a, b]$, para $a, b \in \mathcal{R}$.

Un intervalo semiabierto es un conjunto continuo de números reales que contiene solo uno de los puntos extremos y se representa como $[a, b)$ o $(a, b]$, según sea el caso, para $a, b \in \mathcal{R}$.

Para que una función sea continua en uno de estos intervalos, debe satisfacer la definición correspondiente al tipo del intervalo.

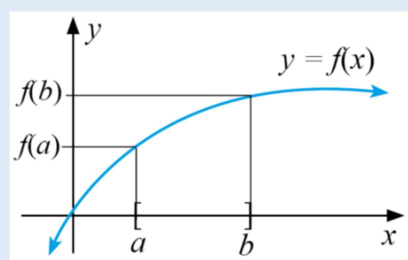
Definición de continuidad en un intervalo abierto

Una función f es continua en un intervalo abierto (a, b), si es continua en cada punto del intervalo.



Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en cada punto del intervalo (a, b), además, el $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y el $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.



Definición de continuidad en un intervalo semiabierto

Una función f es continua en un intervalo semiabierto $[a, b)$, si es continua en cada punto de (a, b) y el $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Una función f es continua en un intervalo semiabierto $(a, b]$, si es continua en cada punto de (a, b) y el $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Ejemplo formativo 3.5

1. Verifica si $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ es continua en $(-\infty, 3)$.

Resolución

El dominio de f es $\mathcal{R} - \{-3\}$.

El intervalo $(-\infty, 3) \in D_f$ (dominio de f).

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3, x \neq 3$$

Luego, la función $f(x) = x + 3$ es continua en $\mathcal{R} - \{-3\}$.

Por lo tanto, la función f es continua en cada punto del intervalo $(-\infty, 3)$.

Ejemplo formativo 3.6

Determina los intervalos en los que $g(x) = \begin{cases} 2, & -3 \leq x < -1 \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 2 \end{cases}$ es continua.

Resolución

El dominio de g es $[-3, -1) \cup (-1, 2]$.

La función g es continua en cada punto de los intervalos $(-3, -1)$ y $(-1, 2)$.

Continuidad en $x = -3$: $\lim_{x \to -3^+} g(x) = \lim_{x \to -3^+} 2 = 2 = g(-3)$.

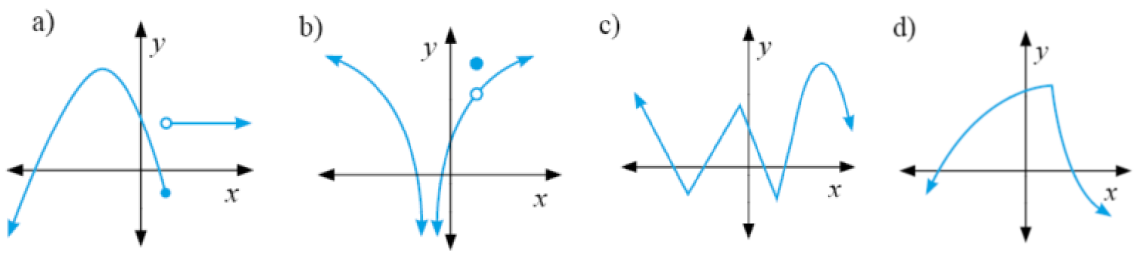
Continuidad en $x = -1$. Tenemos que $g(-1)$ no está definido, por lo que g no es continua en $x = -1$.

Continuidad en $x = 2$. $\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 2^-} x^2 + \lim_{x \to 2^-} 1 = 5 = g(2)$.

Por lo tanto, la función g es continua en los intervalos $[-3, -1)$ y $(-1, 2]$.

Evaluación formativa 3.1

1. La función $f(x) = -3$, para $x = 5$, ¿es continua en $x = 5$?
2. ¿Qué condiciones debe satisfacer una función para que sea continua en un punto?
3. Las funciones polinomiales, ¿son continuas en cada uno de sus puntos? ¿Por qué?
4. Si se conoce el dominio de una función, ¿es posible determinar si es o no continua en un punto dado? Justifica
5. Explica si cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación es continua o discontinua. Justifica tu respuesta.



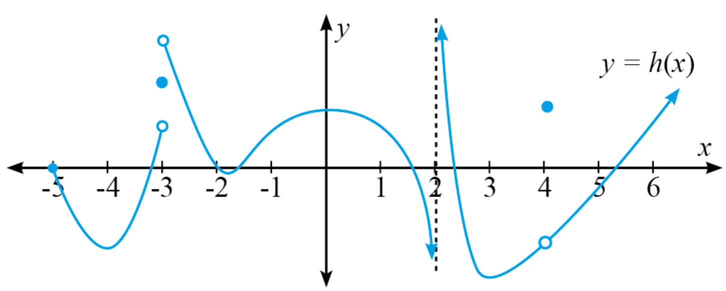
6. Determina si las siguientes funciones son continuas en $x = -1$.

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & x \neq -1 \\ 4, & x = -1 \end{cases}$ b) $h(x) = \frac{1}{x}$

   c) $h(x) = \begin{cases} 3, & x \geq -1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$ d) $g(x) = \frac{1}{x+1}$

   e) $f(x) = \sqrt{x+3}$ f) $h(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

7. Con base en la siguiente gráfica, indica los valores en donde la función h es discontinua y el tipo de discontinuidad que presenta.



8. Esboza una representación gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:
   - Su dominio es $(-10, 5]$.
   - $f(-3) = f(-5) = 5$, $f(2) = -1$.
   - Tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

- Tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ con un punto desplazado en (1, 3).
- Tiene una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x = -4$.
- Tiene una discontinuidad no evitable de salto finito en $x = 2$.

9. Representa de manera gráfica cada una de las siguientes funciones, luego determina los puntos de discontinuidad, y si es removible, redefine la función para que sea continua.

   a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

   b) $g(x) = \frac{1}{x + 5}$

   c) $h(r) = \frac{r^2-1}{r + 1}$

   d) $f(t) = \frac{t}{t^2 - t}$

   e) $g(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 3s - 1}$

10. Verifica si las siguientes funciones son continuas en el valor indicado y si presentan discontinuidad removible o no removible.

    a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 4 \\ x^2 + 1, & x \geq 4 \end{cases}$, en $x = 4$.

    b) $g(s) = \begin{cases} \frac{s^2 - 25}{s}, & s \neq -5 \\ 0, & s = -5 \end{cases}$, en $s = -5$.

    c) $h(s) = \begin{cases} \frac{t^2 - 5t + 6}{t^2 - t - 12}, & t \neq -4, 3 \\ 5, & t = 3 \end{cases}$, en $t = -4, 3$.

    d) $f(x) = \begin{cases} -1 - x, & x < 0 \\ \text{sen } x, & x \geq 0 \end{cases}$, en $x = 0$.

11. Determina los intervalos de continuidad de las siguientes funciones.

    a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ b) $g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 2 \\ x^2 - 4, & x > 2 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

Estudiar las funciones continuas va más allá de verificar si una función es continua en un punto o en un intervalo, pues, permiten de entre las funciones continuas, en las siguientes progresiones, estudiar aquellas que son derivables. El concepto de derivada está basado en el de límite, como lo veremos en la siguiente progresión.

PA 4. Derivadas de funciones algebraicas

Progresión de aprendizaje 4
Interpreta el concepto de derivada, aplicándolo a funciones algebraicas y construyendo las reglas de derivación para operaciones básicas (suma, resta, producto, cociente) y funciones potencia.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 4.1

Analiza y selecciona la opción correcta en cada pregunta.

1. Dada la función $f(x) = 3x^2 - 2x$, ¿cuál es la expresión que le corresponde a $f(x+h)$?

   a) $3x^2 - 2x + 3h^2 - 2h$ b) $3x^2 + 2x + 3h^2 + 2h$

   c) $3x^2 - 2x + 6hx + 3h^2 - 2h$ d) $3x^2 + 2x + 6hx + 3h^2 + 2h$

2. ¿Cuál es la expresión que representa al binomio de Newton?

   a) $(a+b)^n$ b) $e^x - x$ c) $x^n + y^n = z^n$ d) $a^n - b^n$

3. ¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$?

   a) No existe b) 0 c) -6 d) $3/2$

4. La función $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$, en $x = -2$, ¿qué tipo de discontinuidad tiene?

   a) Inevitable de salto finito b) Evitable o removible

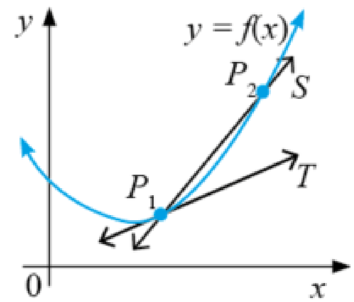
   c) Inevitable de salto infinito d) No hay discontinuidad

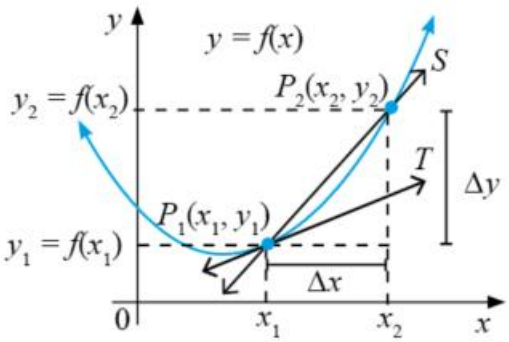
5. ¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$?

   a) No existe b) 0 c) 9 d) $1/6$

Cálculo de las tangentes y concepto de derivada

En Pensamiento Matemático III, se hace referencia a la recta secante S como la recta que corta en dos puntos P_1 y P_2 a la gráfica de la función y la recta tangente como aquella que comparte solo un punto P_1 con la función, dicho punto se denomina punto de tangencia (ver figura de la derecha).





Una de las características principales de una recta es su pendiente m. La pendiente de una recta es un valor numérico relacionado con la inclinación de dicha recta.

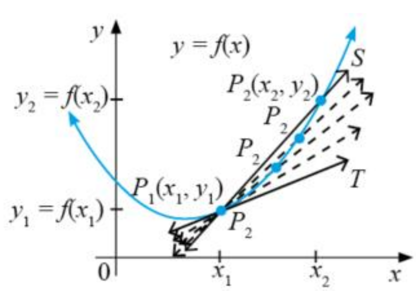
La obtención de la pendiente de una recta secante en la curva de una función es fácil de obtener porque se conocen dos puntos de referencia (ver figura de la izquierda):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

¿Cómo obtener la pendiente de una recta tangente si sólo se conoce un punto?

Leibniz, llamado por muchos el padre del Cálculo Moderno, en 1684 propuso un método general para encontrar las tangentes a una curva a través de lo que él llamó “diferenciales” o “símbolos diferenciales”. El método de Leibniz fue revolucionario porque proporcionó una manera sistemática y general de encontrar tangentes a cualquier curva, algo que antes solo se podía hacer para casos específicos y con métodos mucho más complicados.

Para desarrollar un método para encontrar el valor de la **pendiente de una recta tangente** a la curva de una función en un punto, se debe observar que, al hacer diversas aproximaciones de rectas secantes, se logra una muy buena estimación de la pendiente de la recta tangente en dicho punto.



En la figura de la izquierda se puede observar que el punto P_2 se aproxima cada vez más al punto P_1, hasta parecer que ambos ocupan la misma posición. Sin embargo, no debemos asumir que realmente coinciden. ¿Cómo puede expresarse este comportamiento en términos matemáticos?

Al aproximarse el punto P_2 al punto P_1 las pendientes de las rectas secantes $m_S = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ se aproximan a la pendiente de la recta tangente m_T, lo cual se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$m_T = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se sabe que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, entonces

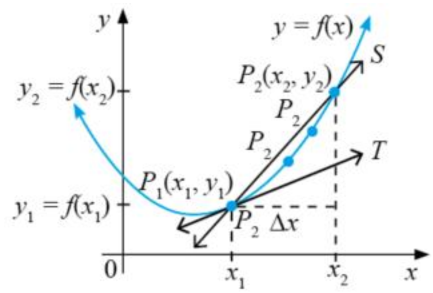
$$m_T = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

También se puede expresar el incremento de la variable independiente x como la diferencia entre sus valores en los dos puntos y expresarlo matemáticamente como:

$\Delta x = x_2 - x_1$, que, al sustituirse en la ecuación de la pendiente, se tiene:

$$m_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Para simplificar y representar la expresión en un solo punto, se puede considerar que $x_2 = x_1 + \Delta x$, y la función puede expresarse como $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x)$.



Del comportamiento de las rectas secantes se puede ver que Δx tiende a disminuir cuando el punto P_2 se acerca cada vez más al punto P_1, sin llegar a tocarlo (ver figura de la derecha). Matemáticamente se expresa como $\Delta x \to 0$.

Esto significa que la posición límite de la recta secante es la recta tangente a la curva en el punto en cuestión.

$$m_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Si consideramos ahora un punto cualquiera de la curva, este límite (el cual genera otra función), representa la pendiente de las diversas rectas tangentes a la gráfica de la función y se le conoce comúnmente como la derivada de la función, misma que en honor a Leibniz se puede representar matemáticamente como:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \text{ o bien, } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Definición de derivada de una función $y = f(x)$

La función derivada de la función $f(x)$ representada por $f'(x)$, es

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \text{ o bien, } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

si el límite existe para todo x de su dominio.

La derivada de una función $y = f(x)$, tiene diferentes representaciones, como:

$$y', \qquad f'(x), \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{Df(x)}{dx}, \qquad D_x y$$

Como ya conoces de Pensamiento Matemático III, la derivada tiene una interpretación física muy importante, especialmente en el contexto del movimiento: la **velocidad instantánea**. Si consideramos una función que describe la posición de un objeto en función del tiempo, la derivada de esta función con respecto al tiempo da la velocidad instantánea del objeto. Es decir, la derivada indica qué tan rápido y en qué dirección se está moviendo el objeto en un instante específico.

Cálculo de derivadas de funciones aplicando la definición de derivada

Para calcular derivadas de funciones aplicando la definición de derivada, se utiliza la fórmula: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, que también es llamada regla general de derivación.

Este proceso de derivación puede hacerse siguiendo las reglas de la fórmula como una sola expresión, o bien puede realizarse por pasos y aplicar lo que algunos textos le llaman la regla de los cuatro pasos y que se resumen de la siguiente manera:

Paso 1. Calcula $f(x+h)$.

Paso 2. Calcula la diferencia $f(x+h) - f(x)$.

Paso 3. Calcula el cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Paso 4. Calcula el límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Si el límite anterior existe, puede decirse que la función es derivable y su derivada es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo formativo 4.1

1. Calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Resolución

Con la regla de los cuatro pasos, se tiene:

Paso 1. $f(x+h) = (x+h)^2 - 4(x+h) + 3 = x^2 + 2hx + h^2 - 4x - 4h + 3$

Paso 2. $f(x+h) - f(x) = x^2 + 2hx + h^2 - 4x - 4h + 3 - (x^2 - 4x + 3)$

$$= x^2 + 2hx + h^2 - 4x - 4h + 3 - x^2 + 4x - 3$$

$$= 2hx + h^2 - 4h$$

Paso 3. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2hx+h^2-4h}{h} = \frac{h(2x+h-4)}{h} = 2x + h - 4$

Paso 4. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h - 4) = 2x - 4$

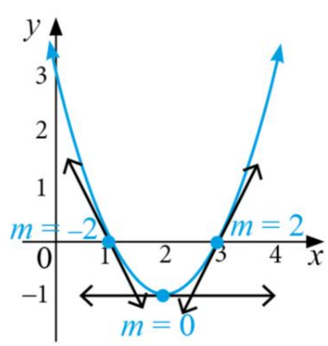
La derivada de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$, con respecto a $\boldsymbol{x}$, es $f'(x) = 2x - 4$.

Esta nueva función representa las pendientes de las rectas tangentes a la curva de la función y su valor en cada punto es variable, porque también depende del valor de x. Estos cálculos pueden utilizarse para hacer un análisis de la gráfica de la función.

¿Qué valor de x hace que la pendiente sea cero ($f'(x) = 0$)?

$f'(x) = 2x - 4 = 0$, al despejar el valor de x, se tiene $2x - 4 = 0$, $x = 2$.

En $x = 2$ la pendiente de la tangente a la curva es cero.



¿Cómo se interpreta en la gráfica de la función?

En la figura de la izquierda puede observarse que la recta tangente a la curva en $x = 2$ es $m = 0$ y en ese punto de la función la recta tangente es paralela al eje de las x, además para esta función cuadrática en particular, es el valor de la abscisa del vértice de la parábola.

¿Cómo se obtienen las pendientes $m = -2$ y $m = 2$?

Estas pendientes se obtienen con los valores de $\boldsymbol{x}$ de los puntos correspondientes sustituidos en la ecuación de la derivada de la función:

En $x = 1$, se tiene que $m = f'(1) = 2(1) - 4 = -2$, la pendiente es $m = -2$.

En $x = 3$, se tiene que $m = f'(3) = 2(3) - 4 = 2$, la pendiente es $m = 2$.

Ejemplo formativo 4.2

1. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2-3}{4x}$.

Resolución

Con la regla de los cuatro pasos, se tiene:

Paso 1. $f(x+h) = \frac{(x+h)^2-3}{4(x+h)} = \frac{x^2+2hx+h^2-3}{4x+4h}$

Paso 2. $f(x+h) - f(x) = \frac{x^2+2hx+h^2-3}{4(x+h)} - \frac{x^2-3}{4x} = \frac{(x^2+2hx+h^2-3)x-(x^2-3)(x+h)}{4(x+h)x}$

$$= \frac{(x^3 + 2hx^2 + h^2x - 3x) - (x^3 - 3x + x^2h - 3h)}{4(x+h)x}$$

$$= \frac{x^3 + 2hx^2 + h^2x - 3x - x^3 + 3x - x^2h + 3h}{4(x+h)x}$$

$$= \frac{2hx^2 + h^2x - x^2h + 3h}{4(x+h)x}$$

Paso 3. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{2hx^2+h^2x-x^2h+3h}{4(x+h)x}}{h} = \frac{2hx^2+h^2x-x^2h+3h}{4(x+h)xh} = \frac{h(2x^2+hx-x^2+3)}{4(x+h)xh} = \frac{(2x^2+hx-x^2+3)}{4(x+h)x}$

Paso 4. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2x^2+hx-x^2+3)}{4(x+h)x} = \frac{x^2+3}{4x^2}$

La derivada de la función $f(x) = \frac{x^2-3}{4x}$, con respecto a x, es $f'(x) = \frac{x^2+3}{4x^2}$.

Derivada de funciones algebraicas

En Pensamiento Matemático III estudiaste las reglas fundamentales que te permitieron calcular derivadas de manera más eficiente, sin tener que recurrir directamente a la definición. Estas reglas de derivación simplifican el proceso de diferenciación, evitan tener que utilizar la definición de derivada en cada caso y facilitan el cálculo de derivadas de funciones algebraicas y trascendentes. También demostraste que:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, \text{ sí } c \text{ es constante y } \frac{d}{dx}(x) = 1.$$

Ejemplo formativo 4.3

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3$, b) $f(x) = -5$, c) $f(x) = \frac{2}{3}$, d) $f(x) = \sqrt{7}$, e) $f(x) = \pi$

Resolución

a) $\frac{d}{dx}(3) = 0,$ b) $\frac{d}{dx}(-5) = 0,$ c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\right) = 0,$ d) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{7}\right) = 0,$ e) $\frac{d}{dx}(\pi) = 0$

La derivada de la función potencia de base "x", $f(x) = x^n$, con n natural

Apliquemos la definición de derivada

1) $f(x+h) = (x+h)^n$ (binomio de Newton)

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2} + \cdots + h^n$$

2) $f(x+h) - f(x) = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2} + \cdots + h^n - x^n$

$$= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2} + \cdots + h^n$$

3) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2} + \cdots + h^n}{h} = \frac{h[nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + h^n]}{h}$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}h}{2} + \cdots + h^n$$

4) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}h}{2} + \cdots + h^n\right) = nx^{n-1}$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

La derivada de una función potencia con base x es igual al producto del exponente por la base elevada al exponente menos uno.

Reglas de derivación de funciones algebraicas básicas

Regla de la derivada del producto de una constante por una función

La derivada de una constante por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.

$$[cf(x)]' = cf'(x)$$

Ejemplo formativo 4.4

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = x$ b) $y = 4x$ c) $y = -2x$ d) $y = ax$ e) $y = \frac{x}{3}$

Resolución

a) $y' = \frac{d}{dx}(x) = 1$ b) $y' = \frac{d}{dx}(4x) = 4(1) = 4$ c) $y' = \frac{d}{dx}(-2x) = -2(1) = -2$

d) $y' = \frac{d}{dx}(ax) = a(1) = a$ e) $y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$

Ejemplo formativo 4.5

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = 4x^3$ c) $f(x) = 5x^4$ d) $f(x) = 6x^5$

e) $f(x) = 11x^{10}$ f) $y = -4x^3$ g) $y = \frac{3x^4}{5}$ h) $y = ax^6$

Resolución

a) $f'(x) = 6x$ b) $f'(x) = 12x^2$ c) $f'(x) = 20x^3$

d) $f'(x) = 30x^4$ e) $f'(x) = 110x^9$ f) $y' = -4(3x^2) = -12x^2$

g) $y' = \frac{3}{5}(4x^3) = \frac{12x^2}{5}$ h) $y' = a(6x^5) = 6ax^5$

Ejemplo formativo 4.6

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^{-4}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$ d) $f(x) = \frac{4}{x^2}$ e) $f(x) = \frac{3}{2x^6}$

Resolución

a) $f'(x) = (x^{-4})' = -4x^{-5}$

En muchas ocasiones estas potencias se presentan como expresiones en forma de cocientes, que deben convertirse en potencias con exponentes negativos, de acuerdo con la propiedad $\left(\boldsymbol{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}\right)$.

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-3}) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^2}\right) = 4\frac{d}{dx}(x^{-2}) = 4(-2x^{-3}) = -\frac{8}{x^3}$

e) $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2x^6}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\frac{d}{dx}(x^{-6}) = \left(\frac{3}{2}\right)(-6x^{-7}) = -\frac{9}{x^7}$

Ejemplo formativo 4.7

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^{3/2}$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ d) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

e) $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$ f) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$ g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

Resolución

a) $f'(x) = \left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{3/2-1} = \frac{3}{2}x^{1/2}$

Generalmente, estas potencias se presentan como expresiones irracionales (radicales), que deben convertirse en potencias con exponentes fraccionarios, de acuerdo con la propiedad $\left(\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}\right)$.

b) $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\frac{d}{dx}\sqrt[4]{x^3} = \frac{d}{dx}\left(x^{3/4}\right) = \frac{3}{4}x^{-1/4} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

e) $\frac{d}{dx}\sqrt[4]{x^5} = \frac{d}{dx}\left(x^{5/4}\right) = \frac{5}{4}x^{1/4} = \frac{5\sqrt[4]{x}}{4}$

f) $\frac{d}{dx}6\sqrt[3]{x^2} = 6\frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = 6\left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = \frac{4}{x^{1/3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

En muchas ocasiones, se presentan funciones irracionales como cocientes con radicales en el denominador. Estas deben convertirse en potencias con exponentes fraccionarios, de acuerdo con las propiedades $\left(\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}\right)$ y $\left(\frac{1}{x^n} = x^{-n}\right)$, combinadas.

g) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-2/3}\right) = \frac{-2}{3}x^{-5/3} = -\frac{2}{3x^{5/3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

h) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-5/3}\right) = \frac{-5}{3}x^{-8/3} = -\frac{5}{3\sqrt[3]{x^8}}$

Regla de la derivada de la suma de funciones

La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función.

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

Como estudiaste en Pensamiento Matemático III, esta regla es válida para la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, para tres funciones f, g y h:

$$[f(x) + g(x) + h(x)]' = \left[\left(f(x) + g(x)\right) + h(x)\right]' = [f(x) + g(x)]' + h'(x)$$

$$= f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

Regla de la derivada de la diferencia de dos funciones

La derivada de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de las derivadas de cada función.

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Ejemplo formativo 4.8

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 10$ b) $f(x) = 3x^2 + 3x + 3 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}$

c) $f(x) = \left(2x^4 - \frac{4}{x^3} + 8\sqrt[4]{x^7} - 1\right)$

Resolución

a) $\frac{d}{dx}(3x^3 - 4x^2 + 10) = 3(3x^2) - 4(2x) + 0 = 9x^2 - 8x$

b) $\frac{d}{dx}\left(3x^2 + 3x + 3 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(3x^2 + 3x + 3 + 3x^{-1} + 3x^{-2})$

$$= 3(2x) + 3 + 0 + 3(-x^{-2}) + 3(-2x^{-3}) = 6x + 3 - \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

c) $\frac{d}{dx}\left(2x^4 - \frac{4}{x^3} + 8\sqrt[4]{x^7} - 1\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^4 - 4x^{-3} + 8x^{7/4} - 1\right)$

$$= 8x^3 - 4(-3x^{-4}) + 8\left(\frac{7}{4}x^{3/4}\right) - 0 = 8x^3 + \frac{12}{x^4} + 14\sqrt[4]{x^3}$$

La derivada de funciones algebraicas que son simplificables

En muchas ocasiones se pide derivar funciones que pueden ser tratadas con técnicas matemáticas que permiten simplificarlas y hacer más rápida la derivación.

Ejemplo formativo 4.9

1. Calcula las siguientes derivadas.

a) $\frac{d}{dx}[x^2(2x^3 - 5x + 1)]$ b) $\frac{d}{dx}(3x + 5)^2$ c) $\frac{d}{dx}(2x^3 + 1)(3 - x^2)$

d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3 - 5x + 1}{x^2}\right)$ e) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3 - 5x^2}{x - 5}\right)$

Resolución

a) $\frac{d}{dx}[x^2(2x^3 - 5x + 1)]$

Se puede realizar la multiplicación y después la derivación:

$$\frac{d}{dx}(2x^5 - 5x^3 + x^2) = 2(5x^4) - 5(3x^2) + 2x = 10x^4 - 15x^2 + 2x$$

b) $\frac{d}{dx}(3x+5)^2$

Se puede desarrollar el binomio al cuadrado y después derivar:

$$\frac{d}{dx}(9x^2+30x+25)=9(2x)+30=18x+30$$

c) $\frac{d}{dx}(2x^3+1)(3-x^2)$

Se puede realizar la multiplicación y después la derivación:

$$\frac{d}{dx}(6x^3-2x^5+3-x^2)=\frac{d}{dx}(-2x^5+6x^3-x^2+3)=-2(5x^4)+6(3x^2)-(2x)$$
$$=-10x^4+18x^2-2x$$

d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3-5x+1}{x^2}\right)$

Se puede realizar la división y después la derivación:

$$\frac{d}{dx}(2x-5x^{-1}+x^{-2})=2-5(-x^{-2})-2x^{-3}=2+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}$$

e) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-5x^2}{x-5}\right)$

Se puede realizar la división (factorización) y después la derivación:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2(x-5)}{x-5}\right)=\frac{d}{dx}(x^2)=2x$$

Sin embargo, es fundamental desarrollar habilidades para aplicar las fórmulas de derivación de productos y cocientes de funciones.

Regla de la derivada del producto de dos funciones

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda más el producto de la primera función por la derivada de la segunda.

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Como ya estudiaste, esta regla es válida para el producto de cualquier número de funciones. Sean $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, entonces aplicando la regla anterior tenemos

$$[f(x)g(x)h(x)]'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

Esto es, la derivada del producto de tres funciones es igual a la suma de tres términos: el producto de la derivada de la primera función por las otras dos, más el producto de la derivada de la segunda función por la primera y la tercera, más el producto de la derivada de la tercera función por la primera y la segunda.

Ejemplo formativo 4.10

1. Calcula las siguientes derivadas:

a) $\frac{d}{dx}(2x^3+1)(3-x^2)$ b) $\frac{d}{dx}[x^4(x^3-x)]$ c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{2}+2x\right)\left(\frac{x^2}{3}-x\right)$

Resolución

a) $\frac{d}{dx}(2x^3+1)(3-x^2)=(2x^3+1)\cdot\frac{d}{dx}(3-x^2)+(3-x^2)\cdot\frac{d}{dx}(2x^3+1)$

$$=(2x^3+1)\cdot(-2x)+(3-x^2)\cdot(6x^2)$$
$$=-4x^4-2x+18x^2-6x^4$$
$$=-10x^4+18x^2-2x$$

Se puede comparar con el Ejemplo formativo 9.9c) que transforma la función antes de derivar y constatar que los resultados son iguales.

Este cálculo puede realizarse más rápido si se tienen habilidades para derivar polinomios de manera mental y evitar expresar la derivada en el desarrollo.

b) $\frac{d}{dx}[x^4(x^3-x)]=x^4\cdot(3x^2-1)+(x^3-x)\cdot(4x^3)=3x^6-x^4+4x^6-4x^4$

$$=7x^6-5x^4$$

c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{2}+2x\right)\left(\frac{x^2}{3}-x\right)=\left(\frac{x^3}{2}+2x\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}-1\right)+\left(\frac{x^2}{3}-x\right)\cdot\left(\frac{3x^2}{2}+2\right)$

$$=\frac{2x^4}{6}-\frac{x^3}{2}+\frac{4x^2}{3}-2x=\frac{x^4}{3}-\frac{x^3}{2}+\frac{4x^2}{3}-2x$$

Regla de la derivada del cociente de dos funciones

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto de la derivada del numerador por el denominador, menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el denominador al cuadrado.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2},\ g(x)\neq 0$$

Ejemplo formativo 4.11

1. Calcula las siguientes derivadas aplicando la regla del cociente de dos funciones.

a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-5x^2}{x-5}\right)$ b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x^2-1}\right)$ c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)$

Resolución

a) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-5x^2}{x-5}\right)=\frac{(x-5)\cdot\frac{d}{dx}(x^3-5x^2)-(x^3-5x^2)\cdot\frac{d}{dx}(x-5)}{(x-5)^2}$$

$$=\frac{(x-5)\cdot(3x^2-10x)-(x^3-5x^2)\cdot(1)}{(x-5)^2}$$

$$=\frac{3x^3-10x^2-15x^2+50x-x^3+5x^2}{(x-5)^2}$$

$$=\frac{2x^3-20x^2+50x}{(x-5)^2}=\frac{2x(x^2-10x+50)}{(x-5)^2}=2x$$

Se puede comparar con el Ejemplo formativo 4.9e) que transforma la función antes de derivar y constatar que los resultados son iguales.

Este cálculo puede realizarse más rápido si se tienen habilidades para derivar polinomios de manera mental y evitar expresar la derivada en el desarrollo.

b) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x^2-1}\right)=\frac{(x^2-1)(3)-(3x)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^2-3-6x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2}$$

c) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)=\frac{(x+1)(3x^2)-(x^3+1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{3x^3+3x^2-x^3-1}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+3x^2-1}{(x+1)^2}$$

Este resultado puede simplificarse por división

$$\begin{array}{r|l} & 2x-1 \\ \hline x^2+2x+1 & 2x^3+3x^2+0x-1 \\ & -2x^3-4x^2-2x \\ & -x^2-2x-1 \\ & x^2+2x+1 \\ & 0 \end{array}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)=2x-1$$

Evaluación formativa 4.1

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{2}$ b) $f(x)=\frac{2x^4}{7}$

c) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ d) $f(x)=\pi\sqrt[7]{x^3}$

e) $f(x)=3x^3-2x-1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$ f) $f(x)=\left(\frac{x^4}{3}+3x\right)\left(\frac{x^3}{5}-x\right)$

g) $f(x) = \frac{x^5}{3x^2-1}$

PA 5. La derivada de funciones compuestas, implícitas y de orden superior

Progresión de aprendizaje 5
Relaciona las reglas de derivación avanzadas (regla de la cadena, derivación implícita, derivadas de orden superior), aplicándolas en la resolución de problemas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 5.1

1. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 5x + 4$, halla $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ y $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$a)$ $f(x) = 3x^2 - 2x + 16$

b) $f(x) = (5x)^3$

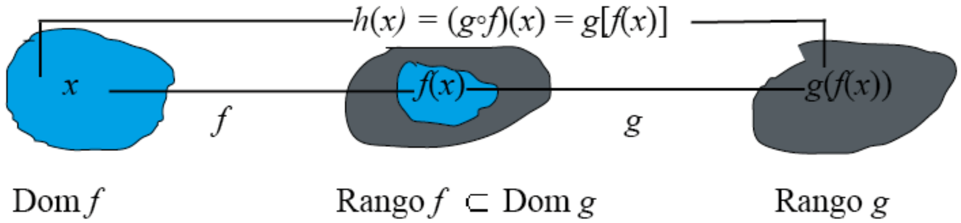
c) $v(x) = (x-1)(x+1)$

d) $h(x) = x^2(2x^3 + x^2 - 3x + 5)$

Calculemos ahora la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. ¿Podemos calcular $f'(x)$ utilizando las reglas de derivación estudiadas en las progresiones anteriores? La respuesta a esta interrogante la encontraremos en esta progresión.

La derivada de funciones compuestas: regla de la cadena

Recordemos el concepto ya estudiado de una función compuesta. Si consideramos por ejemplo la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, esta puede considerarse como que se aplica en primer lugar $f(x) = x^2 - 1$, y posteriormente la función $g(s) = \sqrt{s}$, con $s = f(x) = x^2 - 1$, para lo cual debe cumplirse $s \geq 0$ y por tanto $x^2 - 1 \geq 0$, para que la función g tenga sentido. En ese caso hablamos de $h(x)$ como la función compuesta de g con f y se escribe $(g∘f)(x)$ o $g[f(x)]$. Observa el esquema que se muestra a continuación.



De manera general, sean f y g dos funciones algebraicas o trascendentes tales que el Rango de f está contenido en el Dominio de g, es decir Rango $f \subset D_g$. En ese caso es posible hablar de la función compuesta $(g∘f)(x)$ al evaluar la función g en la imagen de x por f y se tiene

$$(g∘f)(x) = g[f(x)], \text{ donde } (g∘f): D_f \to R_g$$

Cuando estudiamos la regla de la derivada del producto de dos funciones vimos que este no es igual al producto de las derivadas de cada una de ellas. Como veremos la derivada de la función compuesta sí es el producto de las derivadas de cada una de las funciones; solo que, hay que tener en cuenta en dónde se evalúa cada función derivada.

Vamos a partir de un ejemplo para buscar una regla para la derivada de una función compuesta. Para ello tomemos la función $h(x) = (x^2+1)^2$, la que podemos considerar que se obtiene a partir de la composición de las dos funciones $g(x) = x^2$ y $f(x) = x^2 + 1$, es decir $h(x) = g[f(x)]$. Obtengamos la derivada de $h(x)$ a partir de la derivada de un producto de funciones, es decir el producto $(x^2+1)(x^2+1)$. Entonces

$$h'(x) = [(x^2+1)^2]' = [(x^2+1)(x^2+1)]' = 2x(x^2+1) + (x^2+1)\,2x = 4x(x^2+1)$$

Si consideramos ahora la función $g(x) = (x^2+1)^3$ y aplicamos nuevamente la regla del producto, obtenemos

$$g'(x) = [(x^2+1)^3]' = [(x^2+1)^2(x^2+1)]' = (x^2+1)^2(2x) + [(x^2+1)^2]' \cdot (x^2+1)$$

$$= 2x\,(x^2+1)^2 + [4x(x^2+1)](x^2+1) = 2x\,(x^2+1)^2 + 4x\,(x^2+1)^2 = 6x\,(x^2+1)^2$$

Análogamente, para $k(x) = [(x^2+1)^4]$ obtenemos

$$k'(x) = [(x^2+1)^4]' = 8x(x^2+1)^3 = 4(2x)(x^2+1)^3.$$

Analicemos los resultados obtenidos

$$h'(x) = [(x^2+1)^2]' = 4x(x^2+1) = 2\,(2x) \cdot (x^2+1)$$

$$g'(x) = [(x^2+1)^3]' = 6x\,(x^2+1)^2 = 3\,(2x) \cdot (x^2+1)^2$$

$$k'(x) = [(x^2+1)^4]' = 8x(x^2+1)^3 = 4\,(2x)\cdot(x^2+1)^3$$

Ello sugiere que $[(x^2+1)^n]' = n(x^2+1)'\cdot(x^2+1)^{n-1}$, y si asociamos esta expresión con la derivada de la función x^n, entonces $[(x^2+1)^n]' = (x^2+1)'\cdot[(x^2+1)^n]'$.

Como se puede apreciar la derivada de la función $h(x) = (x^2+1)^2$ se obtuvo como el producto de las derivadas de las funciones $f(x) = x^2+1$ y $g(s) = s^2$, con $s = f(x) = x^2+1$.

Sin embargo, no siempre es posible esta vía utilizada. Por ejemplo, basta considerar, en el ejemplo anterior, en lugar de $g(s) = s^2$, la función $g(x) = \sqrt{x}$ y la función compuesta es $h(x) = (g\circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{x^2+1}$.

Para hallar la derivada de la función compuesta $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ no es posible aplicar la regla del producto, ni ninguna de las estudiadas hasta el momento, pero los ejemplos anteriores sugieren, como resultado, una expresión en la que estén las derivadas de las funciones que originan la función compuesta. Por ello, basados en ese resultado, vamos a buscar una expresión que permita hallar la derivada de una función compuesta en general.

Sea $f(x)$ una función derivable en x y $g(x)$ una función derivable en $f(x)$, consideremos la función compuesta $g[f(x)]$ y de acuerdo con la definición de derivada

$$[g(f(x))]' = \lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)]\cdot[f(x+h)-f(x)]}{[f(x+h)-f(x)]\cdot h}$$

Como se observa, se ha multiplicado y dividido por una expresión conveniente, $[f(x+h)-f(x)]$, ya que como sugieren los ejemplos vistos anteriormente, en los resultados está la derivada de la función f.

Nota que para ello es requisito que $f(x+h)-f(x)\neq 0$, y vamos a suponer de aquí en adelante que $f(x+h)\neq f(x)$, aunque esto no siempre se cumple, como, por ejemplo, para la función constante $f(x) = c$, $f(x+h) = f(x) = c$, para cualquier valor de h. Partiendo de esta restricción entonces tendremos que, para valores pequeños de h, $f(x+h)\neq f(x)$, luego es válido multiplicar y dividir por $[f(x+h)-f(x)]$. Como f es derivable, es continua y por tanto $[f(x+h)-f(x)]\to 0$, cuando $h\to 0$. En ese caso, aplicando las propiedades de los límites y haciendo $k = [f(x+h)-f(x)]$

$$[g(f(x))]' = \lim_{h\to 0}\frac{g[f(x+h)-g[f(x)]}{f(x+h)-f(x)}\cdot \mathit{lim}_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{g[f(x) + k] - g[f(x)]}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Una demostración más detallada en cursos avanzados de cálculo diferencial permite obtener el mismo resultado sin necesidad de la restricción anterior.

Ahora podemos enunciar, en general, la regla para la derivada de una función compuesta o regla de la cadena.

Regla de la cadena

Si f es derivable en x y g en $f(x)$, entonces la función compuesta definida mediante $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, es derivable en x, y

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Se denomina regla de la cadena ya que es el producto de la derivada de la primera función evaluada en la segunda, por la derivada de la segunda función. En símbolos

$$(g \circ f)' = g'[f] \cdot f'$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Observa que si $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$ fueran cocientes, entonces se podría cancelar du, pero no es un cociente. Al aplicar la regla de la cadena, trabajamos de la función externa o primera función hacia la función interna o segunda función.

De igual forma si f es derivable en x, g en $f(x)$, y h en $g[f(x)]$, entonces

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g[f(x)]) \cdot g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Para aplicar adecuadamente la **regla de la cadena**, es esencial identificar correctamente las funciones f, g y h en la composición. Esto es clave para evitar errores en el proceso de derivación.

Regla de la cadena para funciones algebraicas

Vamos a utilizar primero la regla de la cadena para hallar la derivada de funciones algebraicas compuestas.

Ejemplo formativo 5.1

1. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(s) = (s + 3)^3$, determina la derivada de la función compuesta $(g \circ f)(x)$.
   Resolución

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \left(\sqrt{x}+3\right)^3 \text{ y } (g \circ f)'(x) = 3\left(\sqrt{x}+3\right)^2\left(\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{3\left(\sqrt{x}+3\right)^2}{2\sqrt{x}}.$$

2. La función $h(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)^2}$ es la composición de $f(s) = \sqrt[3]{s^2}$ y $s = g(x) = x^2 - 2$. Calcula $h'(x)$.

   Resolución

$$h'(x) = \frac{2}{3}(x^2-2)^{-\frac{1}{3}}(2x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-2}}.$$

3. Sean $h(u) = \sqrt[3]{u}, u(s) = s^2+1, s(x) = \sqrt{x}-2$. Determina $h[u(s(x))]$ y calcula su derivada.

   Resolución

   $h[u(s(x))] = \sqrt[3]{(\sqrt{x}\ -2)^2+1}$ y

   $(h[u(s(x))])' = \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{x}\ -2\right)^2+1\right]^{-\frac{2}{3}} \cdot \left[2\left(\sqrt{x}\ -2\right)\right]\left[\frac{1}{2} \cdot\ x^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{(\sqrt{x}\ -2)}{3\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{x}\ -2)^2+1}}.$

4. Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 4$. Calcula las derivadas de $g \circ f\ y\ f \circ g$.

   Resolución

   $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2] = x^2 - 4$. Luego la derivada de $(g \circ f)'(x) = 2x$.

   Ahora, calcula $(f \circ g)(x)$ y su derivada

   $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[(x+4)] = (x-4)^2$, entonces $(f \circ g)'(x) = 2(x-4)$.

Del ejercicio 4 del Ejemplo formativo 5.1 concluimos que como la composición de funciones $f \circ g$ no es conmutativa, las derivadas $(f \circ g)'$ y $(g \circ f)'$ no necesariamente son iguales.

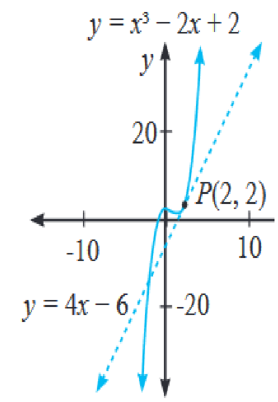
Hasta el momento, hemos considerado funciones algebraicas que son derivables en todo el eje real y, al aplicar las reglas de derivación, se obtiene una función, la función derivada, que permite calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en cualquiera de sus puntos en los que es derivable.

Podemos, entonces, plantearnos calcular el valor de la derivada de una función en un punto específico de su dominio en la que esta sea derivable. En ese caso, estaremos obteniendo la pendiente de la recta tangente a la curva que representa esa función en el punto dado. Para ello, evaluamos la función derivada en dicho punto.

Ejemplo formativo 5.2

Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$, halla la ecuación de la recta tangente en el punto $P(2, 2)$ y para ello calcula su derivada en $x_o = 2$.

Resolución



$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 2)' = 3x^2 - 4x$, y para $x_o = 2$ se tiene

$f'(2) = (3)(2^2) - 4(2) = 12 - 8 = 4.$

Así, hemos hallado el valor de la pendiente de la tangente en el punto $P(2, 2)$.

Ahora puedes hallar la ecuación de la recta tangente en ese punto a partir de la expresión $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Sustituyendo se obtiene $y - 2 = 4(x - 2)$, o sea $y = 4x - 6$.

La derivada de funciones implícitas

A diferencia de la función $y = 2x + 1$, en la que aparece de forma explícita la relación entre la variable independiente y la dependiente, en una ecuación como $x^2 + y^2 = 1$, esto no ocurre y la relación está de forma implícita. De hecho, al resolver esta ecuación obtenemos, como solución, dos relaciones entre x y y, que son $y = \sqrt{1 - x^2}$, así como $y = -\sqrt{1 - x^2}, -1 < x < 1$.

Vamos a considerar a continuación la ecuación $y^3 + 2y^2 - y + x^2 = 2$, siendo y una función de x, es decir $y = f(x)$. Esta ecuación se puede escribir

$$[f(x)]^3 + 2[f(x)]^2 - f(x) + x^2 = 2$$

Pero vamos a calcular la derivada de $y = f(x)$, suponiendo que es una función derivable, sin ocuparnos en tratar de despejar inicialmente $y = f(x)$ en dicha ecuación. Para ello utilizaremos la regla de la cadena. En efecto, si derivamos en ambos miembros de la ecuación

$$(y^3 + 2y^2 - y + x^2)' = (2)'$$

$$(y^3)' + 2(y^2)' - y' + 2x = 0$$

$$3y^2y' + 4yy' - y' + 2x = 0$$

$$y'(3y^2 + 4y - 1) + 2x = 0$$

Si ahora despejamos y' en dicha ecuación

$$y' = \frac{-2x}{3y^2 + 4y - 1}$$

Así, hemos obtenido una expresión para la derivada de la función $y = f(x)$.

Observa que en la expresión de la derecha de dicha igualdad aparece, en el denominador, la expresión genérica de una función $y = f(x)$.

Si en particular, en el ejemplo anterior $y = f(x) = 3x + 1$, la expresión obtenida para la derivada y' estará dada por

$$y' = \frac{-2x}{3(3x+1)^2 + 4(3x+1) - 1} = \frac{-2x}{3(3x+1)^2 + 12x + 3}$$

Este proceso de derivar en ambos lados de una ecuación con respecto a la variable independiente, sin buscar previamente la relación explícita de la función con la variable independiente se denomina **derivación implícita**.

Resumiendo, este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a x y después resolver la ecuación resultante para y. De aquí en adelante, vamos a suponer que la ecuación dada determina a $y = f(x)$ implícitamente como una función derivable de x, de modo que puede aplicarse el método.

Ejemplo formativo 5.3

5. Sea la ecuación $xy - x - 3y + 1 = 0$, donde y es derivable y función de x, es decir $y = f(x)$. Deriva respecto a x en cada miembro de la ecuación aplicando la regla de la cadena.
6. Dada la ecuación $y^2 + xy - xy^2 + x^2 = 0$, deriva en forma implícita.
7. Considera la ecuación $x^2 + y^2 = 16$. Halla y'.

Resolución

1. Si $xy - x - 3y + 1 = 0$, donde y es derivable y función de x, es decir $y = f(x)$. Deriva respecto a x en cada miembro de la ecuación aplicando la regla de la cadena.

$$(xy - x - 3y + 1)' = 0'$$

Por tanto, $(xy - x - 3y + 1)' = (xy)' - 1 - 3y' = y + xy' - 1 - 3y' = 0$. Si ahora despejas y'

$$y' = \frac{1-y}{x-3}$$

Ahora podrías dejar la expresión de la derivada sólo en términos de x. Si en la ecuación $xy - x - 3y + 1 = 0$ despejas y como función de x, se tiene que $y = \frac{x-1}{x-3}$, luego

$$y' = \frac{1-y}{x-3} = \frac{1 - \dfrac{x-1}{x-3}}{x-3} = -\frac{2}{(x-3)^2}$$

2. Dada la ecuación $y^2 + xy - xy^2 + x^2 = 0$, deriva en forma implícita.

$$0 = (y^2 + xy - xy^2 + x^2)' = 2y \cdot y' + y + xy' - y^2 - 2xy \cdot y' + 2x$$
$$= y'(2y + x - 2xy) + y - y^2 + 2x$$

Si se despeja y' obtenemos $y' = \frac{y^2-y-2x}{2y-2xy+x}$

Dicha expresión para la derivada es mucho más difícil de obtener despejando y previamente como función de x para derivar posteriormente.

3. Sea $x^2 + y^2 = 16$. Para hallar y' deriva implícitamente y obtienes $2x + 2y \cdot y' = 0$, de donde $y' = -\frac{x}{y}$

Si te propones obtener la expresión de la derivada en términos de x, al despejar y en la ecuación resultan dos funciones $y = f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, así como $y = g(x) = -\sqrt{16 - x^2}$ y ambas son derivables para $-4 < x < 4$.

Por tanto $y' = -\frac{x}{y}\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}, & \text{si } y = f(x) \text{ con } -4 < x < 4 \\ -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}, & \text{si } y = g(x) \text{ con } -4 < x < 4 \end{cases}$

Aplicando la derivación implícita vamos a continuar ampliando la regla de la derivada para la función potencia $f(x) = x^n$, considerando ahora n un número racional.

Si $y = x^n$, con $x > 0$ y n un número racional cualquiera. Entonces también se cumple

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$$

Como n es racional, lo escribimos en forma $n = \frac{p}{q}, p > 0, q \neq 0$. Entonces $y = x^n = x^{\frac{p}{q}}$ de donde $y^q = x^p$

Así, derivando implícitamente y aplicando la regla de la cadena, como q es un número entero $(y^q)' = (x^p)'$ de donde $q\left(x^{p/q}\right)^{q-1}. y' = px^{p-1}$, por lo que

$$y' = \frac{px^{p-1}}{q\left(x^{p/q}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{pq-p}{q}}} = \frac{p}{q}\, x^{p-1-p+\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}$$

Como se quería demostrar, siendo n un número racional. De hecho, esta propiedad también es válida cuando el exponente es un número real, como se demostrará más adelante al estudiar la función logarítmica.

Estas reglas son válidas para el caso en que la base sea una función compuesta. Reemplaza $f(x)$ por $f[u(x)]$ y $f'(x)$ por $f'[u(x)]$.

Función	Derivada
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu^{n-1} \cdot u'$
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f(x) = \sqrt[n]{u}$	$f'(x) = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

Derivadas de orden superior

Al obtener la derivada de una función derivable f se obtiene otra función f', la que también puede ser derivable en su dominio. En ese caso podemos obtener la derivada de la función derivada, la que denotaremos f'' y cuyo dominio se compone de todos los puntos en los que f' es derivable. A la función f'' la llamaremos segunda derivada de la función f.

Un ejemplo simple puede ser la función $f(x) = x^3$, para la cual $f'(x) = 3x^2$, que como sabemos es derivable y en ese caso se obtiene la función $f''(x) = 6x$.

De igual forma puedes obtener las siguientes funciones derivables, siempre que las obtenidas también sean derivables. En el ejemplo anterior se obtiene la tercera derivada de f, que es $f''' = 6$.

Así, denominamos en general derivadas de orden superior de una función, las sucesivas derivadas de una función f y se denotan $f^{(k)}(x)$ para significar la derivada de orden k, aunque para las primeras derivadas se mantiene la notación anterior.

Ejemplo formativo 5.4

1. Si $f(x) = 4x^5 - 2x^4 + 5x + 3$, halla su derivada hasta el orden 6.

Resolución

$$f'(x) = 20x^4 - 8x^3 + 5$$
$$f''(x) = 80x^3 - 24x^2$$
$$f'''(x) = 240x^2 - 48x$$
$$f^{(4)}(x) = 480x - 48$$
$$f^{(5)}(x) = 480$$
$$f^{(6)}(x) = 0$$

¿Cuál será la expresión de $f^{(7)}(x)$?

4. Si $f^{(4)}(x) = 24$, halla una expresión para la función $f(x)$.

Resolución

$$f'''(x) = 24x + a$$

$$f''(x) = 12x^2 + ax + b$$

$$f'(x) = 4x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx + c$$

$f(x) = x^4 + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d$ siendo a, b, c y d números reales cualesquiera.

Hemos visto como derivar una función de manera sucesiva, ahora relacionemos la representación gráfica de una función con las representaciones gráficas de sus derivadas sucesivas.

Velocidad y aceleración

La derivada de una función $y = s(t)$, como ya conoces, representa la razón de cambio instantánea de la variable dependiente y respecto a la variable independiente t. Si la función derivada $s'(t)$, es derivable, la segunda derivada $s''(t)$, representa entonces la razón de cambio de $s'(t)$ respecto a t.

Cuando $s(t)$ está dada por el trayecto recorrido de un objeto en un tiempo t, entonces $s'(t)$ representa la velocidad instantánea en el instante t.

Si $s(t)$ es una función posición de un objeto, entonces su función velocidad instantánea $\dot{v}(t)$ en el instante t es

$$\dot{v}(t) = s'(t)$$

La rapidez del objeto en el instante t es $|\dot{v}(t)|$.

Y la segunda derivada $s''(t)$, como razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo, es la aceleración del objeto en el instante t. En esos casos se acostumbra a denominar a la segunda derivada por la letra a, por ser la aceleración.

Si $\dot{v}(t)$ es la función velocidad de un objeto, entonces su función aceleración $a(t)$ en el instante t es

$$a(t) = \dot{v}'(t) = s''(t)$$

Ejemplo formativo 5.5

1. Un vehículo se desplaza a lo largo de una trayectoria horizontal descrita por la ecuación $s(t) = 2t^3 - 6t^2$, donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Calcula la velocidad y la aceleración con que marcha a los 4 segundos.

Resolución

Denota por A el vehículo, entonces

$\dot{v}_A(t) = s'(t) = 6t^2 - 12t$ y $a_A(t) = s''(t) = 12t - 12$. Para $t = 4$ segundos, se tiene

$\dot{v}_A(4) = s'(4) = (6)(4^2) - (12)4 = 48\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$, y

$a_A(4) = s''(4) = (12)4 - 12 = 36\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ en cada segundo.

Esto quiere decir que la velocidad cambia en 36 metros por segundo en cada segundo, lo cual se denota abreviadamente por $36\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$.

Evaluación formativa 5.1

1. ¿Qué condiciones debe cumplir la función $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ para poder hallar su derivada respecto a x?.

2. Si $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$, y $g(x) = \sqrt{x}$, halla la derivada de $f \circ g$ y de $g \circ f$.

3. Halla $f'(0)$ si:

   a) $f(x) = \frac{1}{5}(2x^5 - 5)$ b) $f(x) = \frac{2x^3 - x}{3}$ c) $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

4. Calcula el valor de la derivada, en los puntos dados:

   a) $g(x) = x^2 - \frac{4}{x}$, en $P(1,3)$ b) $s(t) = (t-1)^2$, en $P(0,1)$ c) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$, en $P(1,2)$

5. Halla en qué puntos de $y = \frac{2x^2}{x-1}$, la recta tangente es horizontal. ¿Cuál es la expresión algebraica de esta tangente?

6. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva:

   a) $y = \frac{x-2}{x^2-4}$, en el punto $P(-1,1)$ b) $y = x^2 + 2x - 8$, en el punto $P(0,-8)$

7. Si $y = f(x)$, halla la derivada de $x^2y^2 - y - x = 0$.

8. Halla la segunda derivada de las siguientes funciones:

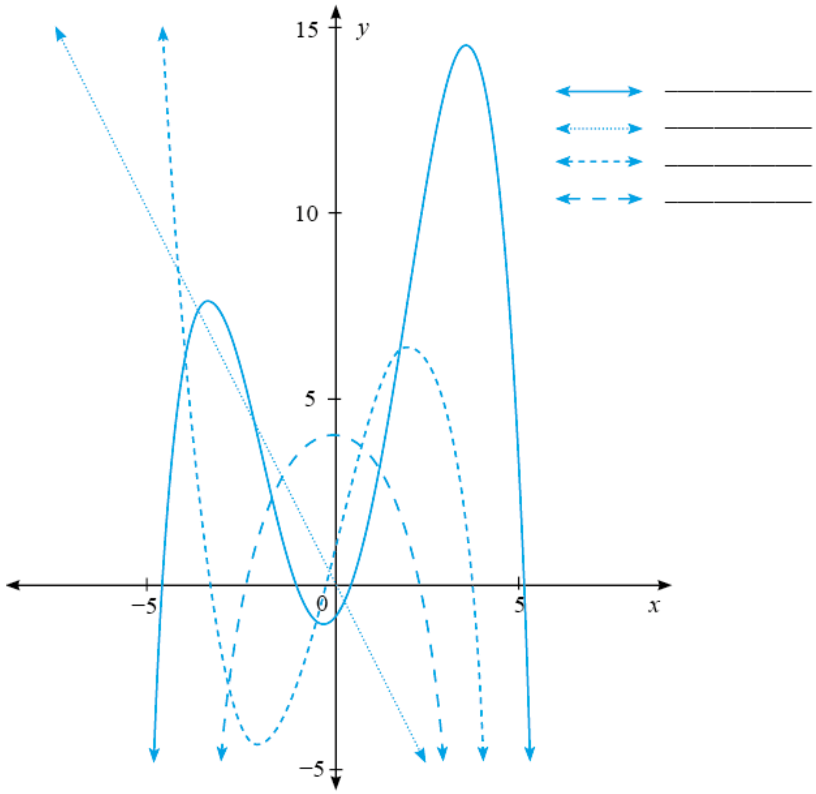
   a) $h(t) = 3(t^2 - 1)^3$ b) $y = \sqrt{x^2 + 16}$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

9. Si $s(t)$ representa la función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal, encuentra la posición, velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en los instantes indicados en cada caso.

   a) $s(t) = -t^3 + 3t^2 + 7$; $t = -2, t = 2$ segundos.

   b) $s(t) = \frac{t}{t+2}$, $t = -1$; $t = 0$ segundos.

10. En la siguiente figura, identifica la gráfica correspondiente a las funciones f, f', f'' y f'''.



¿Qué forma tiene la representación gráfica de $f^{(4)}$?

PA 6. Derivadas de funciones trigonométricas

Progresión de aprendizaje 6
Deduce las reglas de derivación para funciones trigonométricas directas e inversas, analizando sus propiedades y aplicaciones.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 6.1

1. Expresa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

Afirmación	V/F
Si $f(x) = \pi^3$, entonces $f\,'(x) = 3\pi^2$.	
La derivada de un producto de funciones es el producto de las derivadas de cada función.	
Si la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ es horizontal en x_0 , entonces $f'(x_0) = 0$.	
Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$.	
Si $h(x) = g[f(x)]$, $g(x)$ es derivable en $f(x_0)$ y $f'(x_0) = 0$, entonces $h'(x_0) = 0$.	
Si $f(x) = (x^3 - a^3)^4$, entonces $f'(x) = 36x^2a^2(x^3 - a^3)^3$.	
Las funciones periódicas son funciones uno a uno.	
Las funciones periódicas se caracterizan por tener un periodo que se repite de manera continua.	
Las funciones periódicas poseen una función inversa en todo su dominio.	

La derivada de las funciones trigonométricas

En Pensamiento Matemático III, se abordaron las funciones trigonométricas, su periodicidad y representación gráfica, así como las identidades trigonométricas fundamentales. Se presentaron las derivadas de algunas de estas funciones; sin embargo, no se proporcionó una demostración de la validez de dichas fórmulas.

Partimos de la función $f(x) = \text{sen}\, x$, la que sabemos es continua para todo número real y comprobaremos que también es derivable. Por la definición de derivada, si aplicamos la identidad trigonométrica

$$\text{sen}\,(x+h) = \text{sen}\, x \cdot \cos h + \cos x \cdot \text{sen}\, h$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\,(x+h) - \text{sen}\, x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos h + \cos x \cdot \text{sen}\, h - \text{sen}\, x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos h - \text{sen}\, x + \cos x \cdot \text{sen}\, h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos h - \text{sen}\, x}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \text{sen}\, h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \text{sen}\, x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, h}{h} = \text{sen}\, x \cdot (0) + \cos x \cdot (1) = \cos x,$$

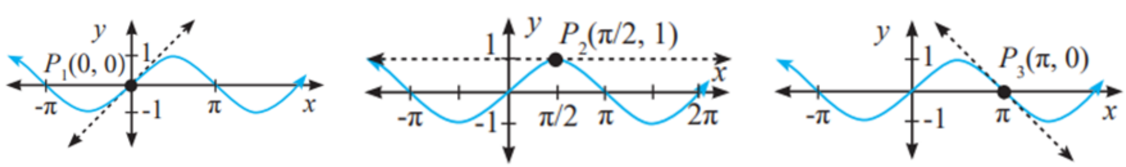
teniendo en cuenta que $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ y $\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, h}{h} = 1$, como ya se demostró.

Por tanto, $f(x) = \text{sen}\, x$ es derivable y

$$(\text{sen}\, x)' = \cos x$$

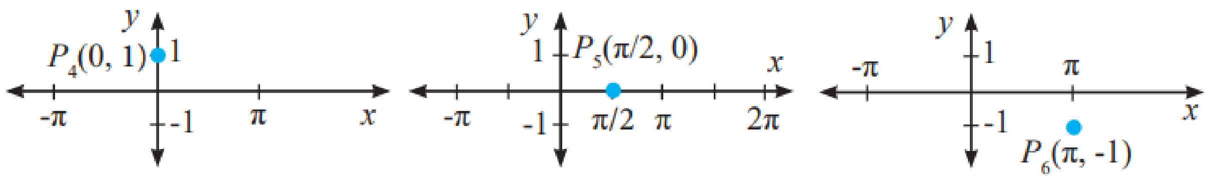
Interpretemos gráficamente este resultado utilizando la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\, x$. Para ello calcula la derivada de la función $f(x) = \text{sen}\, x$ en varios valores de la variable independiente, por ejemplo, en $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$, para hallar el valor de la pendiente de la tangente a la curva $y = \text{sen}\, x$ en los puntos $P_1(0,0), P_2\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y $P_3(\pi, 0)$.

De esta manera, se obtiene la representación gráfica que se muestra a continuación.

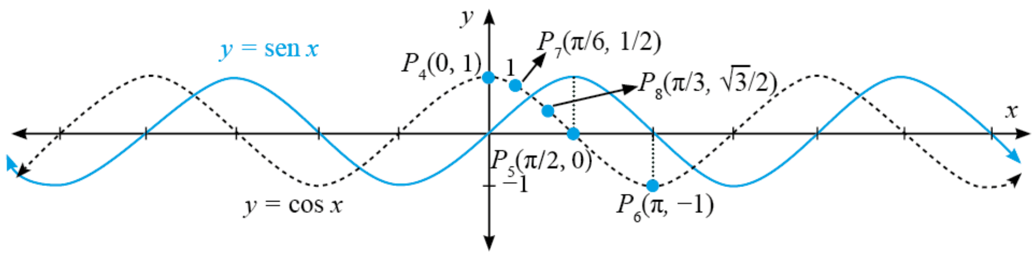


Se obtiene

$f'(0) = \cos(0) = 1$ $\qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\qquad f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$



Si se halla el valor de la derivada de la función $f(x) = \text{sen}\, x$ en más puntos del eje real, por ejemplo, para $\pi/6$ y $\pi/3$ se obtienen los puntos $P_7(\pi/6, 1/2)$ y $P_8(\pi/3, \sqrt{3}/2)$, se puede apreciar, como se muestra en la siguiente gráfica, que se va describiendo la gráfica de la función $f(x) = \cos x$.



De manera similar a como se demostró que $(\text{sen}\, x)' = \cos x$, aplicando la definición de derivada, puedes demostrar que $(\cos x)' = \text{sen}\, x$.

Utilizando las derivadas de las funciones seno y coseno es posible obtener la derivada de otras funciones trigonométricas. Sea por ejemplo $f(x) = \tan x$. En ese caso, aplicando la regla del cociente

$$(\tan x)' = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{(\text{sen}\, x)' \cos x - \text{sen}\, x\, (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x \cos\ x - \text{sen}\, x(-\,\text{sen}\, x)}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

O lo que es lo mismo $(\tan x)' = \sec^2 x$.

Hemos utilizado la regla de la cadena para hallar la derivada de funciones algebraicas, pero también esta se aplica para funciones trascendentes que sean derivables, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo formativo 6.1

1. Sea la función $v(t) = \text{sen}(2t^2 - 2t + 1)$. Halla $v'(t)$.

Resolución

Considera $g(u) = \text{sen}\, u$, $u(t) = 2t^2 - \ t\ +\ 1$. Ambas son funciones derivables y la expresión general para la regla de la cadena $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})' = \boldsymbol{g}'[\boldsymbol{f}] \cdot \boldsymbol{f}'$, con f y g derivables, permite calcular la derivada de $v(t)$.

$v'(t) = [\text{sen}(2t^2 - 2t\ +\ 1)]' = [\cos(2t^2 - 2t\ + 1)]\cdot(4t - 2) = (4t - 2)\cos(2t^2 - 2t\ +\ 1)$.

Fórmulas de derivación para las funciones trigonométricas

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$
$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x \qquad (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

La derivada de funciones trigonométricas inversas

Como conoces, si $f(x)$ es una función, se llama función inversa o recíproca de f, y se denota f^{-1}, a otra función que cumple que:

$$\text{si } f(a) = b, \text{ entonces } f^{-1}(b) = a.$$

Dicho de otro modo, se cumple $f^{-1}[f(x)] = x$ y $f\,[f^{-1}(y)] = y$

Es decir, una función deshace la acción de la otra.

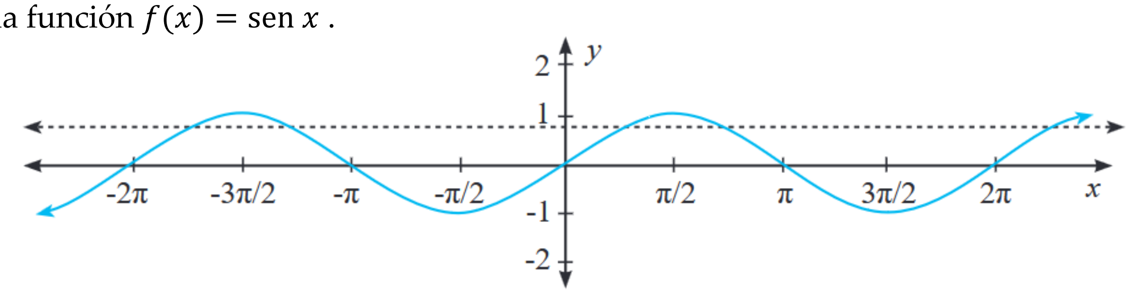
Si f es derivable y f^{-1} su función inversa también lo es, con $f^{-1} \neq 0$, entonces se cumple que

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$$

Para demostrar esa afirmación, vamos a partir de la igualdad $y = f\,[f^{-1}(y)]$. Si derivamos en forma implícita, aplicando la regla de la cadena, se tiene

$$y' = f'[f^{-1}(y)] \cdot [(f^{-1})'(y)]$$
$$1 = f'(x)\,[(f^{-1})'(y)]$$
$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$$

Para continuar, analicemos primeramente si las funciones trigonométricas tienen una función inversa. Como ya conoces, las funciones trigonométricas son funciones periódicas. Eso significa que, para un valor de x, existe un número infinito de imágenes, como se puede apreciar en la siguiente gráfica. Tomemos por ejemplo la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.



Ninguna de estas funciones periódicas es uno a uno, como se puede comprobar gráficamente ya que no pasan la prueba de la línea horizontal, por lo que en su dominio no tienen función inversa. Sin embargo, se puede restringir su dominio para que sí sean uno a uno.

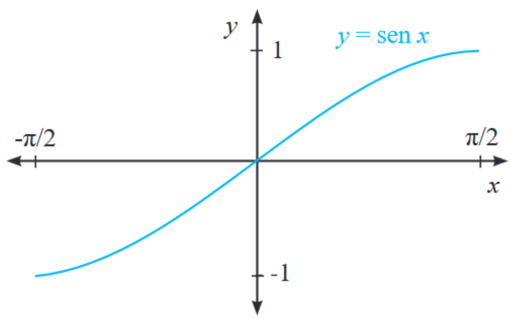
Como son funciones periódicas, constan de un ciclo que se repite constantemente y por ello, para considerar sus funciones inversas hay que restringir el dominio de las funciones trigonométricas a uno de esos ciclos, por ejemplo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

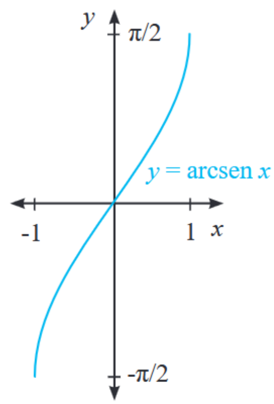
Sea pues $f(x) = \operatorname{sen} x$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, entonces la función inversa f^{-1} de $\operatorname{sen} x$ se denota por $y = \operatorname{arcsen} x$, lo cual significa que, y es el valor del ángulo, medido en radianes, tal que $\operatorname{sen} y = x$.

Como es la función inversa se cumple que $(f \circ f^{-1})(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$.

Por ejemplo $\operatorname{arcsen}(1) = \pi/2$, ya que $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$ o $\operatorname{arcsen}(1/2) = \pi/6$, pues $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$.

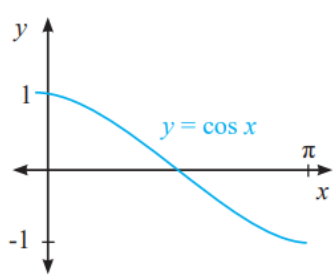
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$, tiene $D_f = \{x \in \mathcal{R} | -1 \leq x \leq 1\}$ y $R_f = \left\{x \in \mathcal{R} | -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ cómo se puede apreciar en la siguiente gráfica.

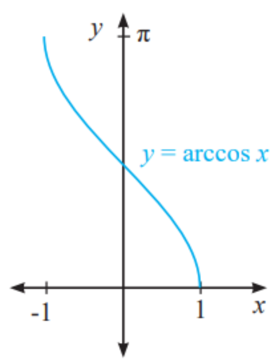




Para definir la inversa de la función coseno hay que restringir también su dominio y se define la función inversa como $y = \arccos x$. Así $\arccos(0) = 1$, pues $\cos 0 = 1$ y $\arccos(1/2) = \pi/3$, pues $\cos \pi/3 = 1/2$.

Su dominio es $D_f = \{x \in \Re | -1 \leq x \leq 1\}$ y su rango es $R_f = \{x \in \Re | 0 \leq x \leq \pi\}$ cómo se ilustra en las siguientes gráficas.

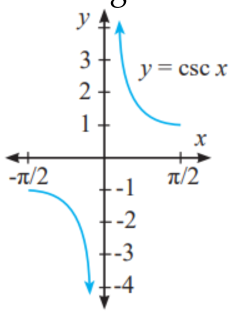


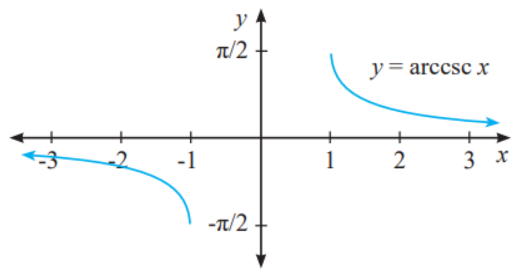


De forma similar se definen las funciones inversas de las restantes funciones trigonométricas, a partir de restringir sus dominios para que dichas funciones tengan una función inversa. Así, $f(x) = \arctan\ x$, es la función inversa de $f(x) = \tan x$, $D_f = \Re$ y $R_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $f(x) = \operatorname{arccot} x$, es la función inversa de $f(x) = \cot x$. $D_f = \Re$ y $R_f = (0, \pi)$.

Para definir la función inversa de la función $\csc x$, también hay restringir su dominio, pero esta función en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, pues $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$. Por eso, consideramos para la función cosecante como dominio restringido $[-\pi/2,\ 0) \cup (0, \pi/2]$. El conjunto imagen de la cosecante está entre $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$, ya que $|\csc x| = \left|\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right| \geq 1$.

De acuerdo con lo anterior el dominio de $f(x) = \operatorname{arccsc}(x)$ es $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ y su rango está dado por $R_f = [-\pi/2,\ 0) \cup (0, \pi/2]$, cómo se ilustra en las siguientes gráficas.





Análogamente se obtiene para la función $f(x) = \operatorname{arcsec} x$, que $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ y $R_f = [-\pi/2,\ 0) \cup (0, \pi/2]$.

Ejemplo formativo 6.2

1. Comprueba que $\operatorname{sen}[\arccos(x)] = \sqrt{1 - x^2}$

Resolución

Si $y = \arccos x$, entonces $x = \cos y$.

Sabes que $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, luego $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$

$x = \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$, de donde despejando $\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - x^2}$

Por tanto, $\operatorname{sen}[\arccos(x)] = \operatorname{sen} y = \sqrt{1 - x^2}$.

Hemos restringido el dominio de las funciones trigonométricas para definir sus funciones inversas. A continuación, obtendremos reglas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas y partiremos primeramente de la función $y = \operatorname{arcsen}(x)$, por lo que $x = \operatorname{sen} y$. Teniendo en cuenta la expresión $f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$ se aplica la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se tiene

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Así, obtenemos la fórmula para la derivada de la función $\operatorname{arcsen}(x)$

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ con } -1 < x < 1$$

Utilizando el mismo procedimiento se obtiene

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ con } -1 < \ x \ 1$$

Aplicando identidades trigonométricas que relacionen las correspondientes funciones trigonométricas directas es posible hallar fórmulas para las demás funciones trigonométricas inversas. Así, se tiene la siguiente tabla:

Fórmulas de derivación para las funciones trigonométricas inversas

$(\text{arcsen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < \ x \ < 1$	$(\text{arccsc } x)' = \frac{-1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2-1}}, \quad \lvert x \rvert > 1$
$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1$	$(\text{arcsec } x)' = \frac{1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2-1}}, \quad \lvert x \rvert > 1$
$(\arctan x)' = \frac{1}{(1+x^2)}, \quad x \in \Re$	$(\text{arccot } x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \ x \in \Re$

Evaluación formativa 6.1

1. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

   a) $y = x^2 \tan \text{x} - 4 \cot x$

   b) $y = \cot(2x) \cos^2(5x)$

   c) $y = \arccos(3x^5)$

   d) $y = \tan(\sqrt{x} + 5)$

   e) $y = \text{arccot} \sqrt{x+1}$

   f) $y = \text{arcsen } (x+1)^2$

   g) $y = 2 \cot\left(\frac{\pi}{2} x + 2\pi\right)$

   h) $v(t) = \sqrt{\text{sen } (3t^2 + 4t - 2)}$

2. Si $\text{sen } (x+y) = y^2 \cos x$, encuentra y'.
3. Si $f(x) = \text{sen}^2 x$, halla $f''(x)$.
4. Si $s(t)$ representa la función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal, encuentra la posición, velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en los instantes indicados en cada caso.

   c) $s(t) = t + \text{sen } (\pi t)$, $t = 1$ y $t = 3/2$ segundos.

   d) $s(t) = \frac{1}{2} t^2 + cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$, $t = 1$ y $t = 3/2$ segundos.

PA 7. La derivada de la función exponencial y logarítmica

Progresión de aprendizaje 7
Formula las reglas de derivación para funciones exponenciales y logarítmicas, comparando sus propiedades con las de las funciones algebraicas y trigonométricas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 7.1

1. Expresa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

Afirmación	V/F
Si $f(x) = e^2$, entonces $f'(x) = 2e$.	
Si $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + 5$, entonces $f'(x) = 2\,(\cos x)(\operatorname{sen} x)$	
La derivada de un cociente de dos funciones es el cociente de las derivadas de cada función.	
Si $f(x) = 3^x - x^3$, entonces $f'(x) = x3^{x-1} - 3x^2$	
Si $f(x) = \cos x^2$, entonces $f'(x) = -2x \operatorname{sen} x^2$	

En Temas Selectos de Matemáticas I estudiaste la función potencia como la expresión $f(x) = x^n$, donde x es un número real positivo y n un número racional. Más recientemente has trabajado con expresiones como

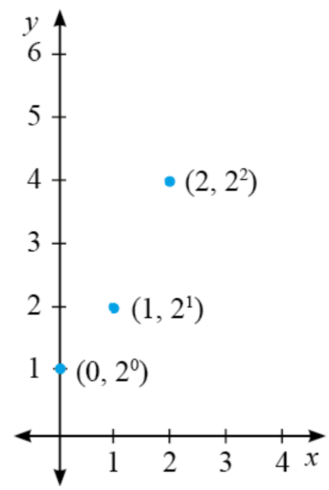
$$f(x) = x^{10},\ v(t) = (2t)^5 \text{ o } \ y = (\operatorname{sen} x)^{1/2}$$

entre otras, en las que la base de las potencias son funciones y el exponente es un número racional fijo. Consideraremos ahora aquellas en las que la base es una constante y el exponente es variable. Para ello tomemos un ejemplo que ilustra este tipo de situación.

En microbiología, el crecimiento se define como el incremento del número de células y la fisión binaria es un proceso por el cual una célula se divide y forma dos células iguales. Un cultivo de una bacteria, por la fisión binaria, se duplica de manera regular durante un intervalo de tiempo determinado.

A continuación, representemos gráficamente esta situación, a partir de una tabla de valores, en el caso de una bacteria cuyo proceso de fisión binaria dura una hora, para apreciar su comportamiento, si se inicia con una bacteria, momento en el cual se empieza a medir el tiempo que transcurre.

Tiempo (horas)	**Número de bacterias**	**Expresión matemática**
0	1	2^0
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4
5	32	2^5
6	64	2^6
7	128	2^7



Como se puede observar la expresión numérica de ese proceso nos conduce a considerar la relación $N(t) = 2^t$, donde N es el numero de bacterias que existen en el cultivo al cabo de las t horas. ¿Podrías calcular cuántas bacterias tendrá el cultivo al cabo de un día?

Es decir, tenemos una función $f(x) = 2^x$, toda vez que, a cada valor de x, es decir de horas transcurridas, le corresponde un único valor de $f(x)$, el número de bacterias.

A este tipo de función se le denomina **función exponencial**. Nota la diferencia entre la función potencia donde la variable independiente es la base y la función exponencial, en la que la variable independiente es el exponente.

variable

$f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^2$

En el ejemplo anterior la variable independiente x representa un número entero positivo, las horas transcurridas. Si de forma más general consideramos para $f(x) = 2^x$ como dominio el conjunto de los números racionales seguimos obteniendo una función cuya representación gráfica mantiene el mismo comportamiento que el del ejemplo.

En efecto, para

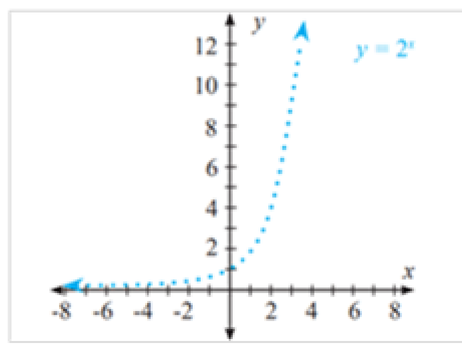
$$x = 0.5, \text{ se tiene } f(0.5) = 2^{1/2} = \sqrt{2} = 1.4142 \ldots$$

$$x = 1.5, \text{ se tiene } f(1.5) = 2^{3/2} = 2\sqrt{2} = 2.8284 \ldots$$

Así, se obtiene la siguiente tabla, para algunos valores de x.

Valor de x	Valor de $f(x) = 2^x$
$x = 0.5$	$y \approx 1.4142$
$x = 1.5$	$y \approx 2.8284$
$x = 2.5$	$y \approx 5.65682$
$x = 3.5$	$y \approx 11.3137$

De esta manera, para un número racional cualquiera x, podemos escribir $x = p/q$, con p entero y q entero positivo, luego, $y = 2^x = 2^{p/q} = \sqrt[q]{p}$.



Para ampliar el dominio de $f(x) = 2^x$ al conjunto de los números reales hay que dar un sentido, por ejemplo, al valor 2^{π} , $\pi = 3.14159...$, es decir, cuando el exponente es un número irracional.

A ello se llega por un proceso de aproximación. La función $f(x) = 2^x$ (gráfica de la derecha), así definida, es creciente y como $3 < \pi < 4$, entonces debe ser $2^3 < 2^{\pi} < 2^4$.

Como $3 < 3.1 < 3.14159\ldots < 3.2 < 4$, entonces $2^3 < 2^{3.1} < 2^{\pi} < 2^{3.2} < 2^4$.

Así sucesivamente

$$2^3 < 2^{3.1} < 2^{3.14} < 2^{3.141} < 2^{3.1415} < \ldots < 2^{3.14159} \ldots < \ldots < 2^{3.1416} < 2^{3.142} < 2^{3.15} < 2^{3.2} < 2^4$$

Y por tanto se define 2^{π} , como el número que está entre todos esos valores que crecen y los que decrecen.

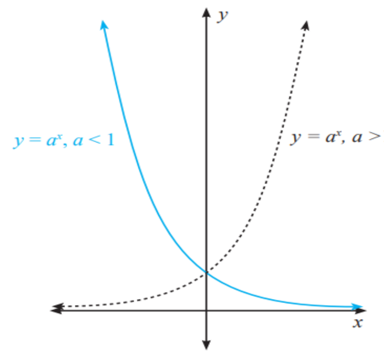
Análogamente se puede definir 2^x, para un número irracional cualquiera, como un proceso de aproximación entre dos valores racionales.

De manera más general, sea $f(x) = a^x$ donde a es un número real positivo y x una variable que representa un número real cualquiera. Ante todo, estamos considerando una función, ya que a cada valor de x corresponde un solo valor de $f(x)$.

A continuación, se puede probar que esta función es uno a uno aplicando la prueba de la recta horizontal.

$f(x) = a^x$ se llama función exponencial de base a.

$$D_f = \mathcal{R} \text{ y } R_f = \mathcal{R}^+$$



Para $a < 1$ la función $f(x) = a^x$ es decreciente y para $a > 1$ es creciente, como se puede apreciar en el gráfico que se muestra a la derecha.

Para $a = 1$, el comportamiento de esta función es diferente. ¿Cuál es la gráfica de $f(x)$ cuando $a = 1$?

Ejemplo formativo 7.1

1. Halla el valor de $s(t) = 3^{t^2+1}$ en $t = 2$.

2. Dada la función $f(x) = 3^{x-1}$, determina para qué valor de x, $f(x) = 27$.

Resolución

1. Halla el valor de $s(t) = 3^{t^2+1}$ en $t = 2$.

$$s(2) = 3^{2^2+1} = 3^5 = 243$$

2. Dada la función $f(x) = 3^{x-1}$, determina para qué valor de x, $f(x) = 27$.

En ese caso $f(x) = 3^{x-1} = 27 = 3^3$, por lo que de acuerdo con las propiedades de la potencia $x - 1 = 3$ y $x = 4$.

Para encontrar la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$comencemos por aplicar la definición de derivada. Si esta función f es derivable en 0, se tiene entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^{(0+h)} - a^0}{h} = a^x \cdot f'(0)$$

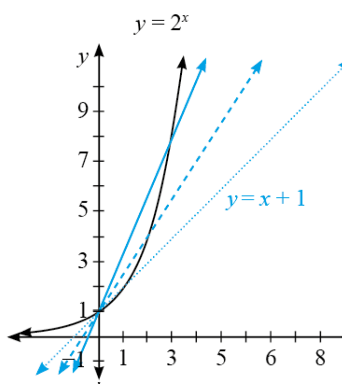
Es decir, $f'(x) = (a^x)' = f'(0)a^x$

Ello significa que el valor de la derivada de $f(x) = a^x$ es proporcional a la propia función $f(x) = a^x$. Sin embargo, no conocemos si existe y el valor de $f'(0)$; pero este resultado sugiere preguntarnos si existirá algún valor de la base a para el cual f sea derivable en cero y $f'(0) = 1$, con lo cual tendríamos una función cuya derivada es ella misma.

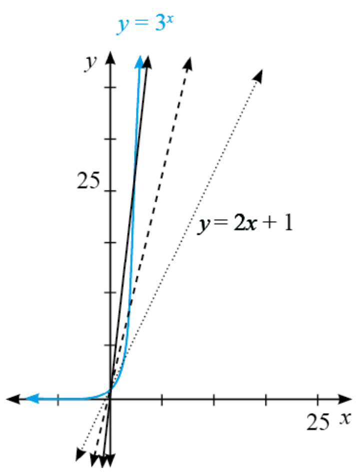
Para investigar esto hay que recordar primero que cualquiera sea el valor positivo que se tome como la base a, la gráfica de esta función pasa por el punto $P(0,1)$, ya que $a^0 = 1$ y que $f'(0)$ constituye el valor de la pendiente de la tangente a la función $y = a^x$ en dicho punto.

Tomemos de nuevo la función $f(x) = 2^x$ y también la función $g(x) = 3^x$ y analizamos qué sucede cuando consideramos las rectas secantes a estas funciones, determinadas por el punto $P(0,1)$ y otro punto $P(x,y)$ que se acerca a $P(0,1)$.

Vamos a representar gráficamente esta situación mediante las siguientes gráficas y observemos las tablas de valores que se muestran a continuación.



Para $y = 2^x$			
Valor de x	Valor de $y = 2^x$	$P_1(x,y)$	Pendiente
3	8	$(3,8)$	$m_1 = 2.33$
2	4	$(2,4)$	$m_2 = 1.5$
1	2	$(1,2)$	$m_3 = 1.0$
0.5	$\sqrt{2}$	$(0.5, 1.4142)$	$m_4 = 0.8284$
0.05	$\sqrt[20]{2}$	$(0.05, 1.03526)$	$m_5 = 0.7052$
0.005	$\sqrt[200]{2}$	$(0.005, 1.0034)$	$m_6 = 0.6043$
0.0005	$\sqrt[2000]{2}$	$(0.0005, 1.0003)$	$m_7 = 0.6963$



Para $y = 3^x$			
Valor de x	Valor de $y = 2^x$	$P_1(x,y)$	Pendiente
3	27	$(3,27)$	$m_1 = 8.67$
2	9	$(2,9)$	$m_2 = 4.0$
1	3	$(1,3)$	$m_3 = 2.0$
0.5	$\sqrt{3}$	$(0.5, 1.7320)$	$m_4 = 1.464$
0.05	$\sqrt[20]{3}$	$(0.05, 1.0564)$	$m_5 = 1.1293$
0.005	$\sqrt[200]{3}$	$(0.005, 1.0055)$	$m_6 = 1.1016$
0.0005	$\sqrt[2000]{3}$	$(0.0005, 1.0005)$	$m_7 = 1.0989$

Como se puede apreciar de la tabla de valores, las pendientes de las tangentes a las funciones $y = 2^x$ y $y = 3^x$ se aproximan a 0.69 y 1.10 respectivamente, en la medida en que nos acercamos a $x = 0$.

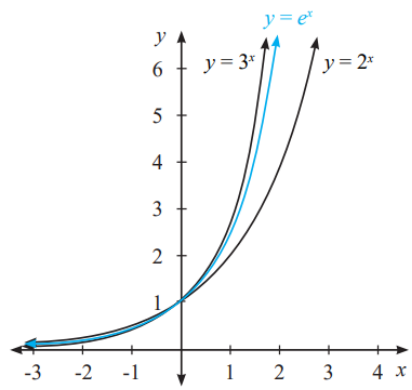
En el paso al límite, estos valores constituyen el valor de la derivada de estas dos funciones en el punto $x = 0$. En efecto,

Para $a = 2$ se tiene $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2^h - 2^0}{h} \approx 0.69$

Para $a = 3$ se tiene $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 3^0}{h} \approx 1.10$

Por tanto, debe existir un número real positivo entre 2 y 3 tal que, si este número se toma como base de la función exponencial, la pendiente de la tangente a esa función en el punto $P(0, 1)$ es uno. A ese número se le representa por la letra e, denominado así por el matemático suizo Leonard Euler y por lo que también se le conoce por el número de Euler.

De esta forma la gráfica de $y = e^x$, se encuentra entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se muestra en la gráfica de la derecha.



El límite $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ que permitió obtener la expresión $f'(x) = (a^x)' \cdot f'(0) = a^x$ para la función exponencial, conduce a definir a e, precisamente como el número real tal que satisface la igualdad

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

que ya estudiaste. Se puede utilizar esta expresión para obtener una aproximación del número e.

Vamos a partir en la siguiente tabla de los valores 2.7 y 2.8, en la que se pueden completar los datos mediante una calculadora.

h	$\frac{(2.7)^h - 1}{h}$	$\frac{(2.8)^h - 1}{h}$
0.1	1.044	1.084
0.01	0.998	1.034
0.001	0.993	1.030

Ello permite afirmar que el valor de e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Un razonamiento similar si se hace otra tabla para valores entre 2.71 y 2.72, lleva a concluir que e está entre 2.71 y 2.72, y una tabla con valores entre 2.718 y 2.719 permite afirmar que e está entre 2.718 y 2.719. Así, se pueden obtener sucesivamente cifras decimales para aproximar el número e y se tiene

$$e = 2.718281828.......$$

El número e es un número irracional, como π, es decir que no se puede expresar como una razón de dos números enteros; o bien, que no puede ser representado por un número decimal exacto o un decimal periódico. Pero también, como π, es un número trascendente, es decir, que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. El estudio de este comportamiento y del cálculo de cifras para e fue objeto de atención por muchos matemáticos durante siglos.

La ventaja de prestar particular atención a este número e está precisamente en que de acuerdo con la expresión $f'(x) = (a^x)' \cdot f'(0) = a^x$, confiere a la función exponencial la importante propiedad de que coincide con su derivada, cuando la base es e, la que será de mucha utilidad en lo adelante. Es decir

$$(e^x)' = e^x$$

Esto significa geométricamente que la pendiente de la recta tangente a la curva e^x, en cualquiera de sus puntos coincide con la ordenada o segunda coordenada de dicho punto. Vamos a aplicar este resultado al cálculo de derivadas aplicando las reglas ya estudiadas.

Ejemplo formativo 7.2

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = xe^x$ b) $f(x) = e^{x^2}$ c) $f(x) = \frac{e^x-2}{2x}$

Resolución

a) $f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

b) $f'(x) = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2}$

c) $f'(x) = \left(\frac{e^x-2}{2x}\right)' = \frac{e^x(2x)-(e^x-2)(2)}{4x^2} = \frac{2e^x(x-1)+4}{4x^2} = \frac{(x-1)e^x+2}{2x^2}$

La derivada de la función logarítmica

Has estudiado la función derivada para las funciones algebraicas y dentro de las trascendentes para las trigonométricas y la exponencial. Pudieras comprobar que ninguna de esas funciones tiene como derivada a la función$f(x) = \frac{1}{x}$, luego puedes preguntarte si existirá una función que tenga a $f(x) = \frac{1}{x}$ como derivada.

Para llegar a ello, vamos a retomar algunos conceptos fundamentales de la función logaritmo que ya has estudiado.

Cuando consideramos la función $y = a^x$, estamos partiendo de que x es la variable independiente y y es función de x. Pero para un valor de y, podrías preguntarte ¿a qué número hay que elevar a, para obtener dicho número? Es decir, estarías considerando a x como función de y.

Tal es el caso, por ejemplo, de la situación inversa a la del ejemplo presentado al inicio de esta progresión sobre el cultivo de las bacterias, si quisieras conocer al cabo de qué tiempo en horas el cultivo llegaría a un número determinado de bacterias.

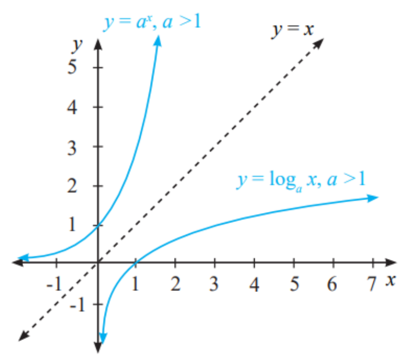
La función exponencial $y = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es uno a uno y por lo tanto tiene función inversa, a la cual se le denomina función logaritmo.

Es decir, si $x = a^y$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces la función logaritmo es la que hace corresponder a cada número real x dado, el número y al cual hay que elevar a a para obtener x. En símbolos

$$y = \log_a x, \text{ sí y sólo si } x = a^y, \text{ con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Por ejemplo $\log_3 81 = 4$, ya que $3^4 = 81$ y $\log_2 0.25 = -2$, pues $2^{-2} = 0.25$.

La función logaritmo, para $a > 1$, es creciente al igual que la función exponencial. Para $a < 1$ es decreciente. Su dominio es $(0, \infty)$ y su rango es $\mathcal{R}$.



Su gráfica es simétrica a la de $y = a^x$, respecto a la recta $y = x$, como se puede apreciar en la gráfica de la derecha, para $a > 1$. Para $a < 1$, también es simétrica a $y = a^x$, ¿respecto a qué recta?

Todas las gráficas de la función logaritmo pasan por el punto $P(1,0)$ pues $\log_a 1 = 0$.

A partir de las propiedades de la función exponencial se pueden demostrar las siguientes propiedades fundamentales de la función logaritmo:

1. Logaritmo de un producto

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

2. Logaritmo de un cociente

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

3. Logaritmo de una potencia

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

4. Logaritmo de una raíz

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

Demostremos la primera de estas propiedades.

Sean $\log_a x = X$, $\log_a y = Y$ entonces $x = a^X, y = a^Y$. Si aplicamos la propiedad del producto de potencias se tiene $x \cdot y = a^X \cdot a^Y = a^{X+Y}$, luego por definición de logaritmo $\log_a(x \cdot y) = X + Y = \log_a x + \log_a y$.

Para obtener la derivada de la función logaritmo obtengamos primero la derivada en el caso de que a sea el número de Euler e. Como ya conoces al logaritmo de base e, se le denomina logaritmo natural o también logaritmo neperiano, por haber sido definido por primera vez por el matemático escosés John Napier y se le denota por las siglas **ln**.

Sea pues $y = \ln x$, es decir $e^y = x$. Nota que para $x = e$, $\ln e = 1$. Entonces por la definición de derivada

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

Ahora aplicamos las propiedades de los logaritmos y multiplicamos y dividimos convenientemente por x en el denominador, ya que $x \neq 0$.

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{h}{x}}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

Si aplicamos las propiedades del logaritmo y los límites, así como que la función logaritmo es continua se cumple

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \frac{1}{x}\cdot\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \frac{1}{x}\cdot\ln e = \frac{1}{x}$$

Para llegar a ese resultado hemos utilizado la expresión estudiada denominada límite fundamental algebraico y que expresa que $\lim_{h\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

De esta forma hemos obtenido una función cuya derivada es la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Es decir, para $x > 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Ya se obtuvo que la derivada de la función $f(x) = x^n$, es también $f'(x) = nx^{n-1}$, cuando n es un número racional. Vamos ahora a utilizar el resultado anterior de la derivada de la función logaritmo para obtener el mismo resultado cuando se considera un número real cualquiera como exponente.

Sea $y = x^k$, de base x positiva y k un número real, entonces $\ln y = \ln x^k = k\ \ln x$ y por la definición de logaritmo $y = e^{k\ln x}$.

Ahora derivamos aplicando la regla de la cadena y obtenemos

$$y' = \left(e^{k\ln x}\right)' = e^{k\ln x}\cdot(k\ln x)' = e^{k\ln x}\left(\frac{k}{x}\right) = \left(\frac{k}{x}\right)\cdot y = \left(\frac{k}{x}\right)\cdot x^k = kx^{k-1}$$

Por tanto $(x^k)' = kx^{k-1}$para k un número real cualquiera y base positiva.

De igual manera se obtiene la derivada de la función exponencial de base $a > 0$, a partir de la obtenida para la base e, como hacemos a continuación.

Ejemplo formativo 7.3

1. Demuestra que $(a^x)' = (\ln a)a^x$.

Demostración

Sea $y = a^x$, entonces $\ln y = \ln a^x = x\ln a$, de donde $a^x = e^{x\ln a}$.

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene $(a^x)' = \left[e^{(x\ln a)}\right]' = e^{x\ln a} \cdot \ln a$.

Si ahora sustituyes $e^{x\ln a}$, obtienes $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Y por tanto $(a^x)' = (\ln a)a^x$.

Para el caso en que la base $a = e$, entonces $(e^x)' = e^x$.

Análogamente se puede obtener, aplicando la regla de la cadena, que si a es un número positivo y $u(x)$ derivable, entonces

$$\left(a^{u(x)}\right)' = (\ln a)a^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Finalmente, para obtener la derivada de la función logaritmo cuando la base es un número positivo $a \neq 1$, obtenemos primero la relación entre el logaritmo de base a y el logaritmo natural.

Si $y = \log_a x$, entonces $a^y = x$. Se tiene

$\ln a^y = y \ln a = \ln x$, de donde $y = \frac{\ln x}{\ln a}$. Si sustituimos y entonces $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Esta última expresión muestra que basta trabajar con el logaritmo natural o de base e, ya que cualquier logaritmo en otra base a se transforma en el de base e multiplicando por el factor $\frac{1}{\ln a}$.

En particular si $x = e$, se tiene que $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

Utilizando esa expresión vamos a obtener la derivada de $\log_a x$.

$$\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{(\ln a)x} = \frac{\log_a e}{x}.$$

De esta manera

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{(\ln a)x} = \frac{\log_a e}{x}.$$

Si en la expresión anterior se considera la función compuesta $\log_a u(x)$ aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$[\log_a u(x)]' = \frac{\log_a e}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{(\ln a)u(x)}.$$

Resumiendo, las reglas más importantes estudiadas para la derivada de las funciones exponencial y logarítmica, son:

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = (\ln a) \cdot a^x \qquad \left(a^{u(x)}\right)' = (\ln a)a^{u(x)} \cdot u'(\text{x})$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{(\ln a)x} = \frac{\log_a e}{x} \quad [\log_a u(x)]' = \frac{\log_a e}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{(\ln a)u(x)}.$$

Evaluación formativa 7.1

1. Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^{\sqrt{3}}$ b) $h(x) = e^{\ln x^3}$ c) $g(x) = e^{\ln x^3 - 3}$

d) $f(x) = \ln(x^3 + 2x)$ e)$y = e^x \cdot \ln(x+1)$ f) $y = \tan\left(\sqrt{x} + e^x\right)$

g) $y = \frac{e^{7x} + \ln x}{x}$ h) $y = \log_3\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right)$ i) $y = \ln\left(\frac{1-2x}{x+5}\right)$

2. Halla la segunda derivada de las siguientes funciones.

a) $g(x) = e^x \ln x^2$ b) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

3. Si $f(x) = xe^x$, calcula su derivada hasta el orden 3.

4. Si $s(t) = \ln(3t + 4)$ representa la función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal, encuentra la posición, velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en el instante $t = 2$ segundos.

PA 8. Análisis y representación gráfica de funciones

Progresión de aprendizaje 8				
Evalúa el comportamiento de funciones utilizando derivadas, sintetizando información sobre monotonía, extremos, concavidad y puntos de inflexión para construir representaciones gráficas.				
Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 8.1

1. Si $f(x) = xe^x$, entonces:

   a) $f'(0) = 1$ b) $f'(0) = e$ c) $f'(0) = 2$

2. La derivada de la función $f(x) = \sqrt{6x+1}$ es:

   a) $\frac{3}{\sqrt{6x+1}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{6x+1}}$ c) $-\frac{6}{\sqrt{6x+1}}$

3. La segunda derivada de la función $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 6x + 6$, es:

   a) $f''(x) = 6x^2 + 8x + 6$
   b) $f''(x) = 12x + 8$
   c) $f''(x) = 12x^2 + 8x$
   d) $f''(x) = 12x^2 + 4x + 6$

Seguramente has obtenido la representación gráfica de funciones utilizando algún graficador y a partir de ella obtienes determinada información sobre las características de la función. Si bien es cierto que la representación gráfica proporciona una visión del comportamiento de una función dada, no siempre se obtienen, gráficamente, con el nivel de precisión que se puedan necesitar, datos exactos que un cálculo analítico puede proporcionar.

Por ejemplo, obtén con un graficador la representación de la función

$f(x) = x^4$. Si observas solamente su gráfico pudieras pensar que dicha función "toca" el eje x, en muchos puntos, independientemente de lo mucho que amplies la escala en los ejes coordenados. Si sucesivamente reduces la escala, se distorsiona la representación gráfica al punto de parecer dos rectas.

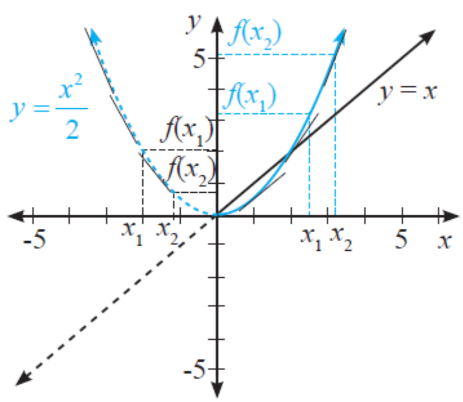
El concepto de derivada y sus propiedades proporcionan muchas posibilidades de obtener información precisa sobre el comportamiento de las funciones y su aplicación a la solución de problemas en diferentes campos. Para ello, es importante hacer el análisis de funciones y de las gráficas que las representan, a partir de estudiar propiedades que se obtienen de sus derivadas, siempre que existan.

Relación de la monotonía de las funciones en un intervalo con su derivada

En las UAC Pensamiento Matemático II y III estudiaste los conceptos de función creciente y decreciente. Decimos que una función continua $f(x)$ en un intervalo $I \in \mathcal{R}$ es creciente en ese intervalo (en sentido estricto) si para todo x_1 y x_2 pertenecientes a I, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) < f(x_2)$.

Análogamente, se dice que una función continua $f(x)$ en un intervalo I es decreciente en ese intervalo (en sentido estricto) si para todo x_1y x_2 pertenecientes a I, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) > f(x_2)$. Si para $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$ (o bien, $f(x_1) \geq f(x_2)$), se dice no decreciente (no creciente).

Buscaremos ahora, si existe relación entre el comportamiento de la derivada de una función en un intervalo y el carácter creciente o decreciente de la función en dicho intervalo; para ello, vamos a utilizar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y la de su derivada que es $f'(x) = x$.



En la gráfica de la izquierda, se observa la representación tanto de la parábola $y = \frac{x^2}{2}$ como de la recta $y = x$. Esta recta no es tangente a ningún punto de la parábola, sino que representa el valor de todas las pendientes de las rectas tangentes a cada punto de la parábola.

Para $x > 0$ todas las pendientes de las rectas tangentes a la parábola son positivas y la función es creciente. Para $x < 0$ todas las pendientes de las rectas tangentes a la parábola son negativas y la función es decreciente.

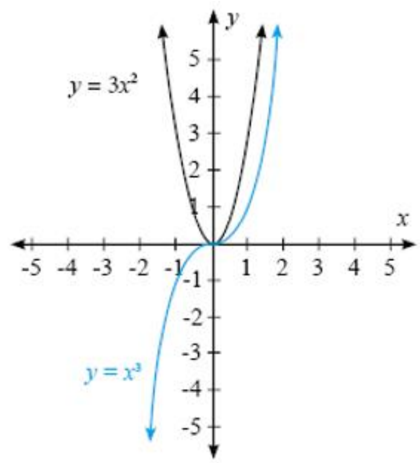
Observa que la derivada es igual a cero para $x = 0$ y este es el punto en que cambia la monotonía de la función de decreciente a creciente, en la medida que recorremos el eje de las x de los valores negativos a los positivos de x.

Ejemplo formativo 8.1

1. Dada la función $f(x) = x^3$, analicemos el comportamiento de esta función en relación con el signo de su derivada y para ello utilicemos su representación gráfica.

Resolución

En la gráfica de la derecha, puedes observar el comportamiento de esta función en relación con el signo de su derivada.
La derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$.
La parábola $y = 3x^2$ representa la derivada de $y = x^3$, respecto a su comportamiento.
Para $x > 0$, $f'(x) = 3x^2 > 0$ y la función $f(x) = x^3$ es creciente.
Para $x < 0$, $f'(x) = 3x^2 > 0$ y la función $f(x) = x^3$ también es creciente.



De los análisis realizados en los dos casos anteriores se llega a un resultado más general, que expresa lo siguiente:

Criterio de la primera derivada

Sea $f(x)$ derivable en un intervalo $I \subset \mathcal{R}$. Para todo x perteneciente a I:

a) Si $f'(x) > 0$ entonces $f(x)$ es creciente en el intervalo I.

b) $Si\ f'(x) < 0$ entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalo I.

Ejemplo formativo 8.2

1. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Analiza su monotonía.

Resolución

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ entonces $f'(x) = \cos x$.

- Para $0 < x < \pi/2$, la función derivada $f'(x) = \cos x > 0$ y consecuentemente la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente en ese intervalo.
- Para $\pi/2 < x < 3\pi/2$, la función derivada $f'(x) = \cos x < 0$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$ es decreciente en ese intervalo.

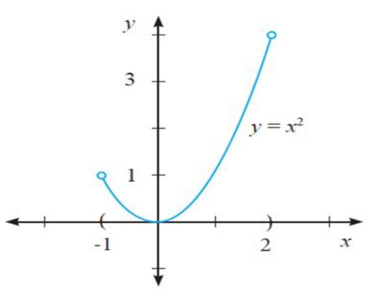
- Para $3\pi/2 < x < \pi$, $f'(x) = \cos x > 0$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente en ese intervalo.

Utiliza, por ejemplo, la aplicación Desmos para obtener las gráficas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y de su derivada $f'(x) = \cos x$ y comprueba las afirmaciones anteriores. Analiza qué ocurre con estas funciones en los puntos 0, $\pi/2$, $3\pi/2$ y π.

Extremos locales y globales de una función

En la vida cotidiana existen muchas referencias a expresiones relacionadas con valores máximos o mínimos en determinadas situaciones. Por ejemplo, la máxima temperatura en que puede estar almacenado un cierto medicamento, cómo lograr el rendimiento máximo de un cultivo en una determinada superficie con un mínimo de fertilizantes, cuál es el máximo de ganancias que se puede obtener en una inversión o calcular el mínimo de materiales necesarios para que una construcción cumpla los parámetros requeridos.

Todas esas situaciones frecuentemente pueden describirse matemáticamente a través de funciones, y se trata entonces de estudiar cómo calcular para dichas funciones, los valores máximos o mínimos que pueden alcanzar.



Gráficamente se puede apreciar en la gráfica de la izquierda, por ejemplo, que la función $y = x^2$ sobre el intervalo abierto $(-1, 2)$ tiene un valor mínimo en $x = 0$, que es $y(0) = 0$ y no tiene un valor máximo, puesto que el intervalo es abierto.

De esta forma, podemos precisar los conceptos de máximo y mínimo de una función:

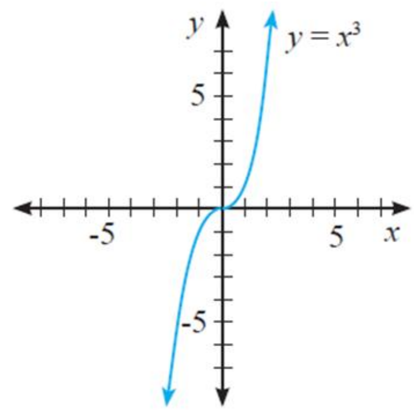
Sea $f(x)$ una función numérica y consideremos cualquier intervalo I incluido en su dominio, en particular el propio dominio de $f(x)$, así como un punto c perteneciente a I. Entonces

a) $f(c)$ es un **máximo absoluto** de f en I, si $f(c) \geq f(x)$ para todo x perteneciente a I.

b) $f(c)$ es un **mínimo absoluto** de f en I, si $f(c) \leq f(x)$ para todo x perteneciente a I.

Sin embargo, no se puede afirmar que todas las funciones alcanzan valores máximos o mínimos.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$, como se observa en la gráfica de la derecha, no tiene ningún mínimo o máximo, cuando la consideramos sobre todo su dominio, el conjunto de los números reales.



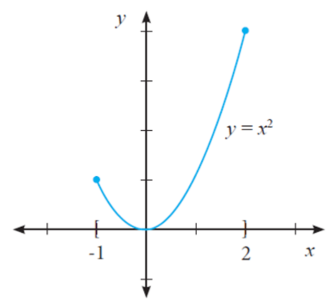
Pero si restringimos su dominio a un intervalo semiabierto, por ejemplo, $I = (-3, 0]$, la función tiene un máximo en $x = 0$, que es 0, pero no tiene un mínimo.

Ejemplo formativo 8.3

1. Identifica en las gráficas de la derecha los máximos y los mínimos si existen.

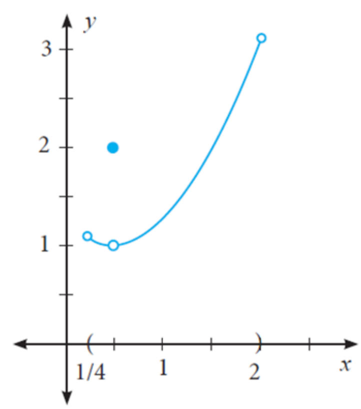
Resolución

a) La función $y = x^2$ sobre el intervalo cerrado $[-1, 2]$ tiene un mínimo en 0 que es $y(0) = 0$ y un máximo en $x = 2$ que es $y(2) = 4$, como se aprecia en la gráfica de la derecha.



b) La función

$$y = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1, & \frac{1}{4} < x < 2, x \neq 1/2 \\ 2, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



representada en la gráfica de la derecha, es una función discontinua y no tiene máximo, ni mínimo.

Como puedes apreciar en los ejemplos anteriores, algunas funciones tienen valores extremos, pero otras no, en dependencia del tipo de intervalo que se considere y del tipo de función. Si la función es continua, ello garantiza que recorra sin interrupción todos los puntos $P(x, f(x))$, que se correspondan con el dominio de

f. En particular, si se trata de un intervalo cerrado $I = [a, b]$, la función alcanza todos los valores para las x pertenecientes a I, incluyendo a y b.

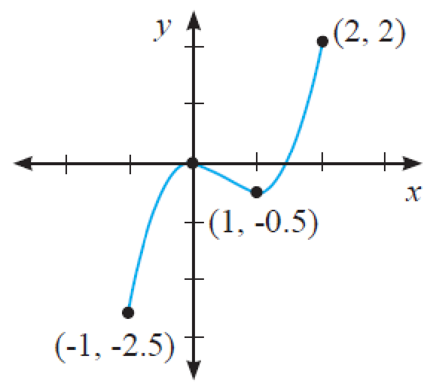
Por tanto, podemos enunciar la siguiente propiedad:

Si $f(x)$ es continua sobre un intervalo cerrado $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto sobre dicho intervalo.

Es decir, existe un punto c_1 perteneciente al intervalo $[a, b]$, tal que $f(c_1) \geq f(x)$ para toda x del intervalo $[a, b]$ y es un máximo absoluto, así como un punto c_2 perteneciente al intervalo $[a, b]$, tal que $f(c_2) \leq f(x)$ para toda x del intervalo $[a, b]$ y es un mínimo absoluto.

Ejemplo formativo 8.4

1. Identifica en la gráfica de la derecha los máximos y los mínimos si existen.



Resolución

En la gráfica de la derecha se muestra la función

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2}{2}, -1 \leq x \leq 2$$

Para $x = 2$ esta función tiene el valor máximo absoluto $f(2) = 2$ y mínimo absoluto en $x = -1$, con $f(-1) = -2.5$.

Si se considera el intervalo abierto $(-1, 2)$ no tendría ni máximo ni mínimo. Si se considera el intervalo semiabierto tendría uno de los valores extremos máximo o mínimo según sea abierto en $x = -1$ o $x = 2$.

Si observas con atención nuevamente la gráfica del Ejemplo formativo 9.4, puedes apreciar que en la gráfica hay otros puntos que llaman la atención. En efecto, si analizamos un intervalo reducido más próximo al punto $P(0, 0)$, entonces en ese punto hay un máximo, que es $f(x) = 0$ y en un intervalo próximo a $P(1, 0)$ hay un mínimo, que es $f(1) = -0.5$.

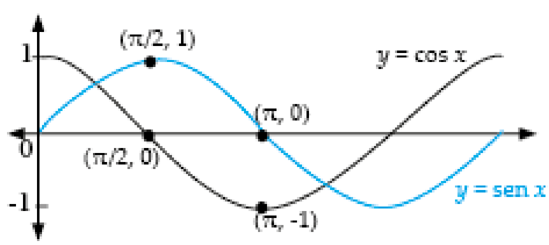
Lo anterior lleva a definir el concepto de extremos locales o relativos, de una función que son aquellos puntos donde la función alcanza un valor máximo o mínimo dentro de un intervalo específico. Una función puede tener varios máximos o mínimos locales.

$\boldsymbol{f(c)}$ se llama máximo local o relativo, si existe un intervalo abierto I que contiene a c, en el que $f(c) \geq f(x)$ para todo x perteneciente a I.

$\boldsymbol{f(c)}$ se llama mínimo local o relativo si existe un intervalo abierto I que contiene a c, en el que $f(c) \leq f(x)$, para todo x perteneciente a I.

Hasta aquí hemos analizado condiciones sobre la existencia o no de extremos absolutos o locales en un intervalo dado, pero aún falta un procedimiento para calcular, si los tiene, los extremos de una función, y es la derivada, cuando existe, la que lo proporciona.

Al finalizar el Ejemplo formativo 9.2 se te pedía comprobar gráficamente, utilizando Desmos, que, por ejemplo, previo al valor $x = \pi/2$ la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente mientras que su derivada $f'(x) = \cos x$ es positiva y que, posterior al punto $x = \pi/2$ la $f(x) = \operatorname{sen} x$ es decreciente mientras que su derivada $f'(x) = \cos x$ es negativa, como se observa en la siguiente gráfica.



En la gráfica de la izquierda, puedes observar cómo en el valor $x = \pi/2$, donde la función $y = \operatorname{sen} x$ alcanza un máximo y el valor de su derivada $y = \cos x$ en ese punto corta al eje x, es decir vale cero. Gráficamente eso también significa que la recta tangente en ese punto es paralela al eje x, ya que la pendiente en ese punto es cero.

El análisis de este ejemplo nos lleva a enunciar el llamado Teorema de Fermat para máximos y mínimos, en alusión a Pierre de Fermat un destacado matemático y jurista francés del siglo XVII.

Teorema de Fermat

Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

La demostración de este teorema se realiza aplicando los conceptos de los límites unilaterales y puedes encontrarla en el siguiente código QR 8.1.

Esta propiedad asegura que, si en un punto hay un extremo local, entonces en ese punto la derivada se anula, es decir, es una condición necesaria, pero no es suficiente, lo que significa que, si la derivada se anula en un punto, entonces no obligatoriamente hay un extremo local en él, como es el caso de la función $f(x) = x^3$cuya derivada $f(x) = 3x^2$, se anula en 0 y ya vimos que no tiene ningún valor extremo.

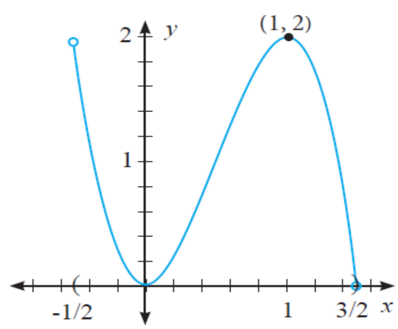
QR 8.1. Teorema de Fermat
Video de Mate & CBC.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Incluso puede no existir la derivada en c, y sí haber un valor extremo en ese punto, como en la función valor absoluto de x, $f(x) = |x|$, en $x = 0$.

Precisamente estos valores del dominio de una función en los que su derivada se anula o no existe y en ellos hay extremos locales son llamados los números o valores críticos de la función. Es decir, un número c perteneciente al dominio de una función $f(x)$ se llama número crítico de f, si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Ejemplo formativo 8.5

1. Determina los extremos locales de la función $f(x) = -4x^3 + 6x^2$ en el intervalo $(-1/2, 3/2)$.



Resolución

Calcula $f'(x)$ e iguala cero. Así, obtienes

$$f'(x) = -12x^2 + 12x = 0, \text{ o bien } 12x(-1 + x) = 0$$

luego los números críticos son $x = 0$ y $x = 1$.

Observa en la gráfica de la derecha, que en $x = 0$ hay un mínimo local cuyo valor es 0 y en $x = 1$ hay un máximo local igual a 2.

Ahora, si la misma función $f(x) = -4x^3 + 6x^2$, se define sobre el intervalo cerrado $[-1/2, 3/2]$, vamos a determinar si existen los extremos absolutos de f.

Del Ejemplo formativo 9.5, ya sabes que los números críticos son $x = 0$ y $x = 1$, cuyas imágenes son $f(0) = 0$ y $f(1) = 2$. Ahora, calcula los valores de f en los extremos del intervalo: $f(-1/2) = 2$ y $f(3/2) = 0$. Comparando todos esos valores, se concluye que f tiene un máximo absoluto en $x = -1/2$ y $x = 2$, así como mínimo absoluto en $x = 0$ y $x = 3/2$, lo cual se corresponde con su gráfica.

Has visto, resultado del Ejemplo formativo 9.5, que puede haber más de un punto en el que se alcance un extremo, y también que los valores extremos pueden estar o no en los extremos del intervalo.

Para determinar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, se procede como sigue:

Sea $f(x)$ una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

1. Hallar los valores de $f(x)$ en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$.
2. Determinar los valores de $f(x)$ en los números o valores críticos de (a, b).
3. Comparar los valores encontrados. El mayor valor es el máximo absoluto y el menor es el mínimo absoluto.

Ejemplo formativo 8.6

1. Siguiendo el procedimiento anterior halla los valores máximos y mínimos absolutos sobre $[0, 2]$ de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Resolución

Paso 1. Valores de $f(x)$ en los extremos del intervalo: $f(0) = 0$ y $f(2) = 2/5$.

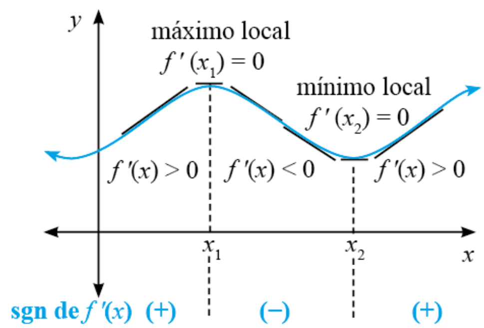
Paso 2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \frac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

Si $f'(x) = 0$, entonces $x^2 = 1$ y $x = \pm 1$, pero $x = -1$ no está en el dominio de esta función, es decir en $[0, 2]$, luego evaluamos la función solo para $x = 1$ y obtenemos $f(1) = 1/2$.

Paso 3. Comparamos los valores obtenidos: $f(0) = 0$, $f(2) = 2/5$ y $f(1) = 1/2$, luego $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ con valor $f(0) = 0$ y tiene un máximo absoluto en $x = 1$ con $f(1) = 1/2$.

Comprueba todo lo anterior haciendo el gráfico de $f(x)$, utilizando por ejemplo Desmos.

El análisis alrededor de los números críticos de una función, en la que esta tiene derivada, permite precisar la monotonía de la función. Si la derivada en los puntos anteriores a un punto x_1 de su dominio es positiva y pasa a negativa en los puntos posteriores a x_1, entonces en x_1 hay un máximo local, como se muestra en la gráfica de la derecha.



De la misma manera si alrededor de un punto x_2 la derivada pasa de negativa a positiva, entonces en x_2 hay un mínimo local.

Ejemplo formativo 8.7

1. Dada la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ investiga sobre sus extremos locales y monotonía.

Resolución

- La derivada de la función es $f'(x) = -2x + 2$ y si se iguala a 0 se tiene $x = 1$.
- Como f es derivable en todo el eje real y la derivada solo se anula en ese punto, entonces $x = 1$ es el único valor crítico. Veamos qué sucede antes y después de $x = 1$.
- Si consideramos $c < 1$, se cumple siempre que $f'(c) > 0$, ya sea c negativo o $0 \leq c < 1$. Si $c > 1$, entonces la expresión $-2c + 2$ siempre es negativa y $f'(c) < 0$.
- Por tanto, la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, es creciente para todo $x < 1$ y decreciente para $x > 1$, por lo que en $x = 1$ tiene un máximo local, que también es máximo absoluto.

Comprueba haciendo la gráfica de la función cuadrática $f(x)$.

Cuando se estudia el comportamiento de una función numérica, si consideramos el punto $P(x, f(x))$, en ocasiones es importante analizar f cuando se toma el opuesto de x, es decir $-x$. Si $f(x)$ y $f(-x)$ son iguales, se dice que se trata de una función par. Si para $f(-x)$, se obtiene $-f(x)$, en ese caso se dice que la función es impar. También existen funciones que no son pares ni impares. Es decir:

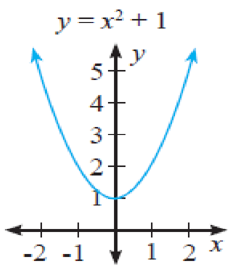
Una función f es **par** si cumple que $f(x) = f(-x)$ en todo su dominio y es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

Así, por ejemplo, son pares las funciones $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$ y son funciones impares $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Ejemplo formativo 8.8

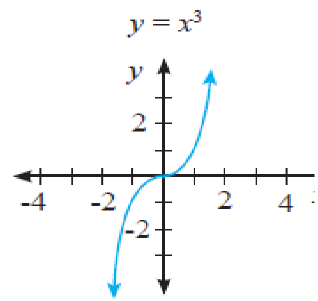
1. Investiga la paridad de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = x^3$.

Resolución



La función $f(x) = x^2 + 1$ es par, pues $f(x) = x^2 + 1 = (-x)^2 + 1 = f(-x)$, ver gráfica de la izquierda.

La función $f(x) = x^3$ es impar, pues $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, ver gráfica de la derecha.



Geométricamente si no varía $f(x)$ al cambiar de x a $-x$, eso significa la simetría de la gráfica de f respecto al eje y, (como se muestra en la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$). La variación de $f(x)$ a $-f(x)$ al reemplazar x por $-x$, significa una simetría respecto al origen de coordenadas o una simetría de 180° respecto al origen de coordenadas, lo que se puede apreciar en la gráfica de $f(x) = x^3$. Además, si una función es par y creciente para $x > 0$, entonces es decreciente para $x < 0$, como puedes apreciar en la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$.

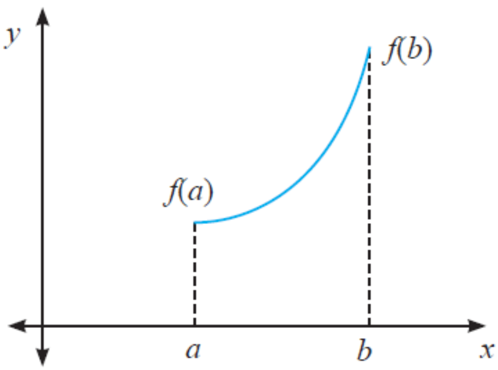
Se cumple que, si una función es par, su derivada es una función impar, siempre que exista la derivada. De forma similar, la derivada de una función impar es una función par.

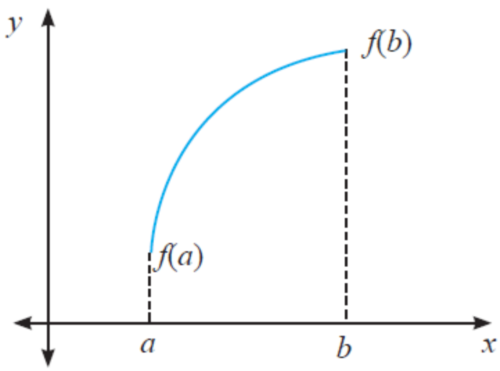
En efecto, si, por ejemplo, una función es par y derivable entonces por la regla de la cadena $f'(x) = [f(x)]' = [f(-x)]' = (-1)\,f'(-x) = -f'(-x)$.

Así, por ejemplo, la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ es par y su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$, es impar. La derivada de la función par, $f(x) = \cos x$ es $f'(x) = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ que es impar.

Concavidad y puntos de inflexión

Ya conoces la utilidad de la función derivada de una función para analizar su monotonía, es decir, los intervalos de crecimiento o decrecimiento. Supongamos que tenemos una función derivable $f(x)$ y que por el análisis de su derivada encontramos que es creciente entre dos puntos a y b de su dominio. Sin embargo, la manera en que crece desde a hasta b no se revela por el análisis de la derivada. Analicemos los gráficos que se muestran a continuación.



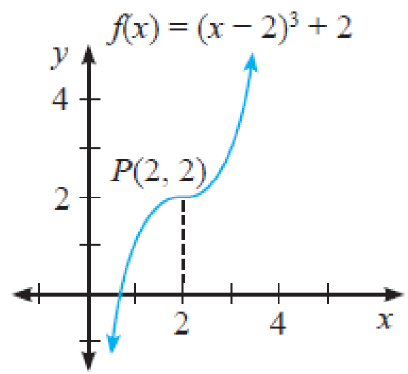


Entre a y b ambas funciones son crecientes, pero de forma distinta. En el primer caso, se dice que la función es **cóncava hacia arriba o simplemente cóncava** y en el segundo, **cóncava hacia abajo o convexa**.

La gráfica de la derecha representa a la función $f(x) = (x-2)^3 + 2$.

Esta función es convexa para todo x tal que $x < 2$ y es cóncava para toda x tal que $x > 2$.

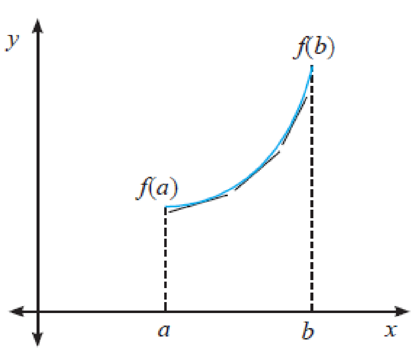
En el punto $P(2,2)$ la función cambia de concavidad; cuando eso ocurre, a ese punto se le denomina de una forma particular.

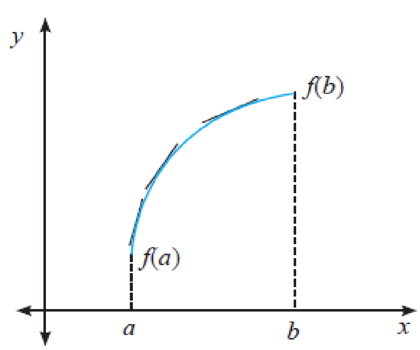


Punto de inflexión

Dada una función $f(x)$, se dice que la función tiene un **punto de inflexión** en c si es continua en c y en $f(c)$ cambia el sentido de la concavidad de $f(x)$.

Para precisar la forma en que se comporta una función cuando crece desde un punto a hasta b, vamos a utilizar nuevamente las derivadas. Para ello, en las siguientes graficas trazamos las rectas tangentes en diferentes puntos y podremos apreciar cierta diferencia en cada uno de los dos casos.





Si observas con atención, en la figura de la izquierda las rectas tangentes están por debajo de la gráfica de la función y en la de la derecha están por encima. En el primer caso esto significa que las pendientes de las rectas tangentes van creciendo, es decir que la función derivada, $f'(x)$, es creciente y por tanto la derivada de la función derivada (segunda derivada de la función f) es positiva.

Este razonamiento nos lleva a la siguiente afirmación: si la segunda derivada de una función $f(x)$ es positiva, entonces $f'(x)$ es creciente, las pendientes de las rectas tangentes a $f(x)$ crecen, luego las rectas tangentes están por debajo de la gráfica de la función $f(x)$ y decimos que es una función cuya representación gráfica crece de forma **cóncava hacia arriba o simplemente cóncava.**

En el segundo caso, en el que las rectas tangentes están por encima de la gráfica, significa que las pendientes de las rectas tangentes van decreciendo y la función $f'(x)$ es decreciente y por tanto la derivada de la función derivada (segunda derivada de la función f) es negativa. Luego, si la segunda derivada de una función f es negativa, entonces, la derivada $f'(x)$ es decreciente, las rectas tangentes están por encima de la gráfica de la función $f(x)$ y decimos que es una función cuya gráfica crece de forma **convexa o también cóncava hacia abajo.**

Podemos enunciar, entonces, la siguiente propiedad:

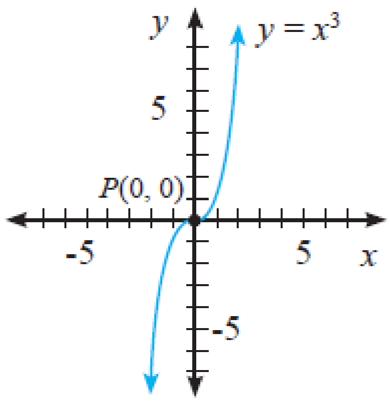
Criterio de la segunda derivada

Sea $f(x)$ una función que tiene segunda derivada en un intervalo abierto (a, b). Si para todo valor c del intervalo (a, b), se cumple que:

a) $f''(c) > 0$ entonces la función f es cóncava en (a, b).

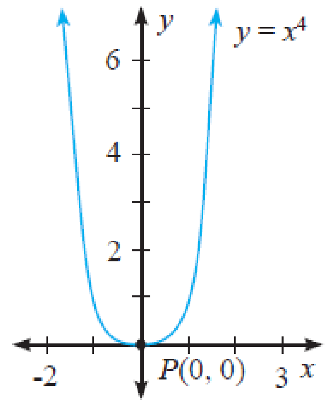
b) $f''(c) < 0$ entonces la función f es convexa en (a, b).

En el caso que $f''(c) = 0$, entonces, f puede tener o no un punto de inflexión en c. Es decir, si $P(c, f(c))$ es un punto de inflexión entonces se cumple que $f''(c) = 0$; pero bajo la condición $f''(c) = 0$, la función puede tener o no un punto de inflexión en c como veremos a continuación con las funciones $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$ cuyos gráficos se muestran a continuación.



Para la función $f(x) = x^3$ se tiene $f''(x) = 6x$; por tanto, es $f''(0) = 0$. En $P(0,0)$ hay un punto de inflexión.

Para la función $f(x) = x^4$ se tiene $f''(x) = 12x^2$, por tanto, es $f''(0) = 0$. Pero en $P(0,0)$ no hay un punto de inflexión, sino un mínimo.



Ejemplo formativo 8.8

1. Sea $f(x) = x^4 - 4x^3$, analiza si tiene extremos locales y puntos de inflexión.

Resolución

- La función $f(x)$ es una función polinomial, por lo que tiene derivada de todos los órdenes.
- $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0$, luego los números críticos de f son $x = 0$ y $x = 3$.
- $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0$ y los posibles puntos de inflexión son $x = 0$ y $x = 2$.

  Primero, vamos a comparar los signos de la derivada alrededor de los números críticos.

Valor de x	Signo de la derivada $f'(x) = 4x^2(x-3)$
$x < 0$	$-$
$0 < x < 3$	$-$
$3 < x$	$+$

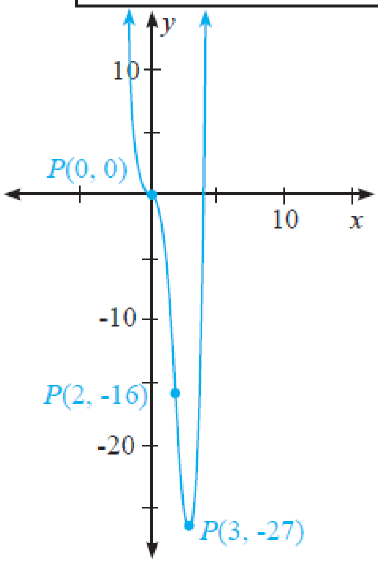
De acuerdo con la tabla en $x = 0$ no hay un extremo local de la función, pero en $x = 3$ la derivada pasa de negativo a positivo, por lo que es un punto en el que hay un mínimo local y su valor es

$$f(3) = (3)^4 - 4(3)^3 = -27.$$

Es decir, hay un mínimo en $P(3,-27)$.

- Respecto a los puntos de inflexión, como lo que interesa es el signo que tiene la segunda derivada, se pueden seleccionar números específicos para evaluar su comportamiento en cada intervalo considerado, por ejemplo -1 para $x < 0$, así como 1 para $0 < x < 2$ y 4 para $x > 2$.

Valor de x	Signo 2^{da} derivada $f''(x) = 12x(x - 2)$	Comportamiento
$x < 0$	$+$	Cóncava
$0 < x < 2$	$-$	Convexa
$2 < x$	$+$	Cóncava



Por tanto, en $x = 0$ y $x = 2$ hay puntos de inflexión, pues cambia la concavidad.

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 2^4 - 4(2^3) = -16$, los puntos de inflexión son $P(0,0)$ y $P(2, -16)$.

El comportamiento de la función es como se muestra en el gráfico de la izquierda.

La segunda derivada, junto a la primera, proporciona una fuerte herramienta como criterio para determinar los extremos locales de una función sobre un intervalo abierto, ya que, si $f(x)$ es una función tal que tiene derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ en un intervalo abierto (a, b) y existe un c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c, y si $f''(c) > 0$, entonces en el punto c hay un mínimo. En síntesis, el signo que tenga la segunda derivada, f'', en c determina qué tipo de extremo local tiene en c.

Podemos resumir lo anterior en un criterio que resulta muy útil para determinar la existencia de extremos locales de una función:

Criterio de la segunda derivada para extremos locales

Si $f(x)$ está definida sobre (a, b) y tiene derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ en un intervalo (a, b), entonces para un valor c perteneciente al intervalo se cumple que:

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en c.
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en c.

Las desigualdades para $f''(c)$ son estrictas; si la segunda derivada es cero en un punto c, no se puede sacar ninguna conclusión sobre la existencia de un extremo local en c. En efecto, sean, por ejemplo, $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^4$. En ambos casos, tanto la primera derivada como la segunda se anulan en $x = 0$, y ya vimos que la función $f(x) = x^3$ es creciente sin extremos locales, y que en $x = 0$ tiene un punto de inflexión, mientras que la función $g(x) = x^4$, tiene en $x = 0$ un punto de mínimo que es igual a 0 (ver gráficas de $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^4$).

Por tanto, para determinar si una función tiene extremos locales en un punto de su dominio, cuentas con dos criterios, el de la primera derivada, que consiste en determinar los puntos críticos y ver si antes y después en alguno de ellos la primera derivada cambia de signo; o el de la segunda derivada, que se refiere a analizar qué signo tiene la segunda derivada al evaluarla en los puntos críticos.

Ejemplo formativo 8.9

1. Analiza del comportamiento de la función $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 3$.

Resolución

Sea $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 3$ y vamos a analizar su comportamiento en cuanto a monotonía, extremos locales, concavidad y puntos de inflexión.

Primero. Por ser una función polinomial f es derivable sobre todo el eje real.

Segundo. Calcula la derivada de f y se iguala a 0, para buscar los números críticos.

$$f'(x) = 8x^3 - 24x = 8x(x^2 - 3) = 8x\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$$

Por tanto, los números críticos son: $x = 0,\ x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$.

Tercero. Calcula la segunda derivada de f y se iguala a 0, para buscar los posibles puntos de inflexión y estudiar la concavidad.

$$f''(x) = 24x^2 - 24 = 24(x^2 - 1) = 24(x + 1)(x - 1) = 0$$

Los posibles puntos de inflexión son -1 y 1.

Cuarto. Estudia el comportamiento de las derivadas en esos puntos encontrados.

Como la primera derivada tiene tres factores, estudia por partes los signos que se van obteniendo al considerar valores de x, incluidos en cada uno de los intervalos que determinan los números críticos. Por ejemplo: -2, -1, 1 y 2, respectivamente y recuerda que lo que se requiere no es el valor que se obtiene, sino el signo final de la expresión.

Valor de x	Signo de $8x$	Signo de $8x\left(x + \sqrt{3}\right)$	Signo de $f'(x)$ $8x\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$	Comportamiento de f
$x < -\sqrt{3}$	–	+	–	decreciente

$-\sqrt{3} < x < 0$	–	–	+	creciente
$0 < x < \sqrt{3}$	+	+	–	decreciente
$\sqrt{3} < x$	+	+	+	creciente

Por tanto, en: $x = -\sqrt{3}$ hay un mínimo local, cuyo valor es $f\left(-\sqrt{3}\right) = -15$
$x = 0$ hay un mínimo local, cuyo valor es $f(0) = 3$
$x = \sqrt{3}$ hay un mínimo local, cuyo valor es $f\left(\sqrt{3}\right) = -15$

Este resultado también lo podemos obtener aplicando el criterio de la segunda derivada. En efecto,

$f'\left(-\sqrt{3}\right) = 0$ y $f''\left(-\sqrt{3}\right) = 24\left[\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 1\right] = 48 > 0$ significa un mínimo en $x = -\sqrt{3}$.

$f'(0) = 0$ y $f''(0) = 24[(0)^2 - 1] = 48 < 0$ significa un máximo en $x = 0$.

$f'\left(\sqrt{3}\right) = 0$ y $f''\left(\sqrt{3}\right) = 24\left[\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1\right] = 48 > 0$ significa un mínimo en $x = \sqrt{3}$.

Para estudiar los posibles puntos de inflexión realiza un análisis similar y toma como valores para determinar los signos, los números -2, 0 y 2 respectivamente y completar la tabla siguiente:

Valor de x	Signo de $24(x + 1)$	Signo de f'' $24\,(x + 1)(x - 1)$	Concavidad
$x < -1$	$-$	$-$	Cóncava
$-1 < x < 1$	$+$	$-$	Convexa
$1 < x$	$+$	$+$	Cóncava

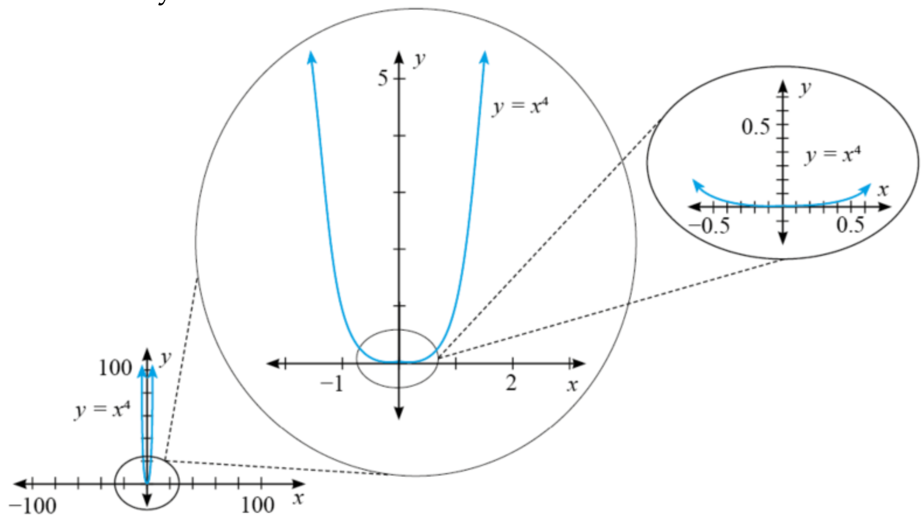
En $x = -1$ y $x = 1$ se tienen los puntos de inflexión que son $P(-1, -7)$ y $P(1, 7)$.

¿Puedes trazar un esbozo de la gráfica de f con la información obtenida?

Representación gráfica de funciones

Al inicio de esta progresión se expresaba la significación de obtener información sobre las características de una función y de su representación gráfica a partir de estudiar sus derivadas, siempre que estas existan.

Retomemos el análisis inicial de la función $f(x) = x^4$, cuya representación gráfica aparece en la siguiente figura. Como se expresaba, al ampliar o reducir la escala se distorsiona la imagen como se muestra en la siguiente gráfica. El estudio analítico de dicha función a partir de sus derivadas mostró que tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ y es una función cóncava.



En no pocos análisis, es importante lograr una representación gráfica de una función que se obtenga no sólo de un graficador, sino, además, con la precisión que se puede obtener del cálculo analítico basado en sus propiedades. Por ello, vamos a precisar una estrategia que caracterice los elementos fundamentales del comportamiento de una función, que ya han sido estudiados, y que permitan lograr su representación gráfica.

Ejemplo formativo 8.10

1. Sea la función $f(x) = \frac{4x^2}{x^2-4}$. Analiza sus características para trazar la gráfica que representa dicha función.

Resolución

Paso 1. Hay que precisar el dominio y rango. El denominador se anula para $x = \pm 2$, por tanto $D_f = (-\infty, 2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

Como $f(x) = \frac{4x^2}{x^2-4} = 4 + \frac{16}{x^2-4}$, para $x < -2$ o $x > 2$, $f(x) > 4$ y para $-2 < x < 2$, $f(x) \leq 0$, el rango de la función es $R_f = \mathcal{R} - (0,4]$.

Paso 2. Para $x = 0$ es $y = 0$ y viceversa; la intersección con los ejes coordenados es $P(0, 0)$.

Paso 3. $f(x)$ es una función par, por tanto, $f(x)$ es simétrica respecto al eje y.

Paso 4. Estudia qué pasa para valores muy grandes, y muy pequeños, de x.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2-4} = \frac{4}{1} = 4$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{x^2-4} = \frac{4}{1} = 4$

De lo anterior se obtiene que $y = 4$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

Paso 5. Como los valores $x = \pm 2$ anulan el denominador de la función $f(x)$, estudia los límites laterales en esos puntos.

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{4x^2}{x^2-4} = +\infty,\ \lim_{x\to -2^+} \frac{4x^2}{x^2-4} = -\infty,\ \lim_{x\to 2^-} \frac{4x^2}{x^2-4} = -\infty,\ \lim_{x\to 2^+} \frac{4x^2}{x^2-4} = +\infty$$

Por tanto, $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de la función $f(x)$.

Paso 6. Ahora veamos si $f(x)$ tiene números críticos.

$$f'(x) = \frac{8x(x^2-4) - 4x^2(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{8x^3 - 32x - 8x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-32x}{(x^2-4)^2}$$

Si $f'(x) = 0$ entonces $x = 0$ es el único número crítico. El signo de $f'(x)$ depende del numerador. Para $x < 0$, se tiene $f'(x) > 0$ y para $x > 0$ es $f'(x) < 0$.
Por tanto, como $f(0) = 0$, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $P(0,0)$.

Paso 7. Calcula ahora si hay posibles puntos de inflexión.

$$f''(x) = \frac{-32(x^2-4)^2 - (-32x)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)(-32x^2+128+128x^2)}{(x^2-4)^4}$$

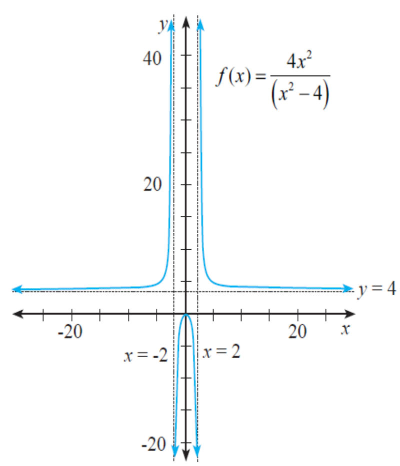
$$= \frac{32(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

Como el numerador es siempre positivo, el signo de $f''(x)$ depende del denominador.

Si $-2 < x < 2$, es $(x^2-4)^3 < 0$, luego $f''(x) < 0$ y en $(-2, 2)$ la función $f(x)$ es convexa.

Si $x < -2$ ó $x > 2$, es $(x^2-4)^3 > 0$, luego $f''(x) > 0$. Por tanto, en $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$ la función $f(x)$ es cóncava.

Con los resultados obtenidos se puede trazar la representación gráfica de la función, la que se muestra en la gráfica de la derecha. En la gráfica se han destacado las asíntotas, tanto verticales como la horizontal y se puede apreciar que, en efecto, es una función par.



Vamos a resumir ahora, los pasos por lo que debes guiarte para el análisis de una función y consecuentemente hacer una gráfica apropiada de la misma. En síntesis:

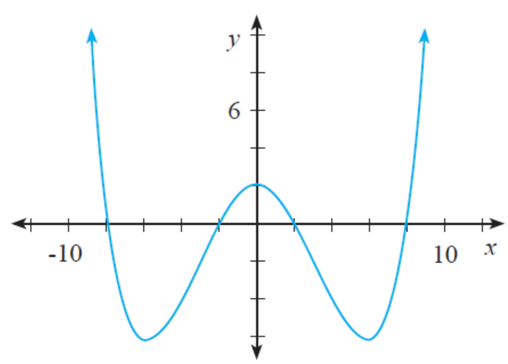
1. **Dominio y Rango.** En particular, determinar qué valores pueden no ser admisibles para la variable independiente, en dependencia de la expresión de la función.
2. **Intersecciones con el eje X y el eje Y.** Para la intersección con el eje Y, se hace $x = 0$ es decir se calcula $f(0)$ y para la intersección con el eje X, $y = 0$ y se resuelve la ecuación. Esto último puede ser dificultoso en dependencia de la expresión de la función, por lo que puede no ser imprescindible.
3. **Paridad o simetría de la función.** Esto permite, en caso de que tenga alguna simetría, reducir a la mitad el análisis de la función**.**
4. **Asíntotas.** Su análisis permite ubicar adecuadamente en el sistema de coordenadas la curva correspondiente a la función estudiada.
5. **Extremos relativos o absolutos.** Se aplica el criterio de la primera y de la segunda derivada, lo que lleva a obtener, a partir de los números críticos, los máximos y mínimos relativos que posea la función.
6. **Concavidad.** El signo que adopta la segunda derivada antes y después de los posibles puntos de inflexión, precisa si es cóncava o convexa en el intervalo que se esté valorando.
7. **Puntos de inflexión.** A partir del análisis anterior, se determina en qué puntos la función tiene un cambio en la curvatura.

Evaluación formativa 8. 1

1. Expresa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Afirmación	V/F
El máximo absoluto es el menor de los máximos locales o relativos.	
Los valores que hacen 0 la primera derivada se les llama números críticos.	
Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, la función f tiene un mínimo en c.	
En un punto de inflexión cambia el sentido de concavidad de una función.	
Si la segunda derivada se anula en c, entonces c es un punto de inflexión.	

2. Dada la gráfica de la derecha, estima en qué puntos la función es creciente, decreciente, tiene extremos relativos, es cóncava o convexa.



3. Dadas las siguientes funciones, trazar un esbozo de la gráfica correspondiente a partir del estudio de su comportamiento, siguiendo los pasos estudiados.

a) $y = -x^3 - x^2 + 2$ b) $y = x^3 - 3x$ c) $y = x^4 - 2x^2$

Bibliografía consultada

Cuéller. J. A. (2024). Pensamiento Matemático 3. Mc Graw Hill.

Vizcarra, F., Forneiro, R., Sosa, C. E. y Flórez, A. (2020). *Cálculo I. Cálculo diferencial para bachillerato*. Servicios Once Ríos Editores.

SEP (2023a). *Acuerdo número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Diario Oficial de la Federación.

SEP (2023b). *Orientaciones Pedagógicas del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.

SEP (2023c). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.

Referencia a las fuentes de consulta de códigos QR

QR 8.1. Teorema de Fermat Video de Mate & CBC https://youtu.be/fWIMDQY-mVM
Fuente: Parzibyte, 2025.